

This is an Open Access document downloaded from ORCA, Cardiff University's institutional repository: <https://orca.cardiff.ac.uk/id/eprint/136576/>

This is the author's version of a work that was submitted to / accepted for publication.

Citation for final published version:

Pan, Z., Liu, J., Wu, J. , Fu, H. and Tong, X. 2020. Probabilistic load flow calculation for three-phase unbalanced droop-regulated islanded microgrids based on low-rank approximation method. China Journal of Electrical Engineering 40 (20) , pp. 6506-6515. 10.13334/j.0258-8013.pcsee.191527

Publishers page: <http://www.pcsee.org/CN/Y2020/V40/I20/6506>

Please note:

Changes made as a result of publishing processes such as copy-editing, formatting and page numbers may not be reflected in this version. For the definitive version of this publication, please refer to the published source. You are advised to consult the publisher's version if you wish to cite this paper.

This version is being made available in accordance with publisher policies. See <http://orca.cf.ac.uk/policies.html> for usage policies. Copyright and moral rights for publications made available in ORCA are retained by the copyright holders.



# 基于低秩逼近法的下垂控制孤岛 微电网三相概率潮流计算

潘忠美<sup>1</sup>, 刘健<sup>2</sup>, 吴建中<sup>3</sup>, 付欢欢<sup>1</sup>, 同向前<sup>1</sup>

(1. 西安理工大学, 陕西省 西安市 710048; 2. 国网陕西省电力科学研究所, 陕西省 西安市 710054;  
3. 卡迪夫大学, 英国 卡迪夫 CF24 3AA)

## Probabilistic Load Flow Calculation for Three-Phase Unbalanced Droop-regulated Islanded Microgrids Based on Low-Rank Approximation Method

PAN Zhongmei<sup>1</sup>, LIU Jian<sup>2</sup>, WU Jianzhong<sup>3</sup>, FU Huanhuan<sup>1</sup>, TONG Xiangqian<sup>1</sup>

(1. Xi'an University of Technology, Xi'an 710048, Shaanxi Province, China; 2. State Grid Shaanxi Electric Power Research Institute, Xi'an 710054, Shaanxi Province, China; 3. Cardiff University, Cardiff CF24 3AA, UK)

**ABSTRACT:** Traditional load flow algorithm is not suitable for droop-regulated islanded microgrids because there is no slack bus and the frequency is not constant. Meanwhile, considering the increasing penetration of renewable energy resources, probabilistic analysis is essential to ensure realistic and accurate load flow results. Therefore, a probabilistic load flow method for unbalanced droop-regulated islanded microgrids is proposed in this paper. Taking voltage of each node and frequency as variables, the load flow model is developed considering the philosophy of droop-controlled distributed generation in a three-phase unbalanced microgrid. A Newton-Raphson (NR) load flow method with optimal multipliers is proposed to solve the flow equations. The convergence performance of NR method is improved by utilizing optimal multiplier deduced from the higher order terms of Taylor expansions of the load flow equations in each iteration. Further, the low-rank approximation (LRA) method is employed to evaluate the probabilistic load flow solutions. Based on the LRA theory, the statistically-equivalent surrogate models for the load flow solutions are built from a small number of samples of deterministic power flow studies. Numerical examples demonstrate the effectiveness and correctness of the proposed algorithm.

**KEY WORDS:** droop-regulated islanded microgrid; three-phase load flow; Newton-Raphson method with optimal multipliers; probabilistic load flow; low-rank approximation

**摘要:** 针对下垂控制型孤岛微电网中无平衡节点且频率不恒定的特征, 兼顾其三相不对称性及其中的不确定性因素的影响, 本文提出了一种基于最优乘子牛顿-拉夫逊法及低秩逼近法的三相概率潮流计算方法。首先建立了计及频率变量的下垂控制孤岛微电网的三相潮流模型, 采用牛顿-拉夫逊法求解, 并利用潮流方程组的泰勒展开式的高阶项信息计算最优乘子, 在迭代中以带最优乘子的修正量进行修正, 显著改善了算法的收敛性。进而, 采用低秩逼近方法计算系统的概率潮流。根据低秩逼近的原理, 通过相对少量确定性潮流计算样本建立所关心的潮流分布变量的统计意义上等效的代理模型, 并计算其均值、标准差, 进一步可通过大量输入随机变量样本代入到代理模型, 得到潮流量的概率密度、累计概率分布等概率特征。算例结果证明了本文算法的有效性与准确性。

**关键词:** 下垂控制孤岛微电网; 三相潮流计算; 最优乘子牛顿-拉夫逊法; 概率潮流计算; 低秩逼近

## 0 引言

近年来, 随着分散型分布式电源(distributed generation, DG)的广泛应用, 微电网技术及规模迅速发展。潮流计算是对微电网分析、规划设计和运行管理的基础。微电网通常有并网和孤岛两种运行模式。并网运行的微电网, 其系统电压和频率由配电网支撑, 并网点为平衡节点。孤岛运行的微电网中, 系统频率、电压及功率的调整控制由其中的主控 DG 承担。根据主控 DG 的组成特点, 孤岛微电网分为主从结构和对等结构两大类。主从结构中, 主控 DG 可起到平衡节点的作用。而对等结构的孤岛微电网, 也称为下垂控制孤岛微电网, 其频率和电压通常由若干下垂控制型 DG(称为“下垂节点”)联合维持, 没有主控电源作为平衡节点, 且系统频

**基金项目:** 国家自然科学基金项目(51677151); 西安理工大学科技创新计划项目(2016CX044); 西安理工大学博士启动项目。

Project Supported by National Natural Science Foundation of China (51677151); Science and Technology Innovation Program of Xi'an University of Technology (2016CX044); Doctoral Start-up Foundation of Xi'an University of Technology.

率也成为变量,因此其潮流模型具有独特性<sup>[1-4]</sup>。

考虑到微电网间歇性 DG 的出力 and 负荷功率具有随机性,概率潮流计算可通过统计方法及系统中的不确定性因素,较之确定性潮流可更全面地反映系统的稳态运行情况。同时,微电网中网架结构参数不对称及负荷和 DG 的功率三相不平衡现象突出。因此,有必要对下垂控制孤岛微电网的三相概率潮流计算问题进行分析研究。

国内外学者关于下垂控制孤岛微电网的潮流算法已取得一些研究成果<sup>[3-14]</sup>。文献[3]将系统频率作为变量并采用牛顿-拉夫逊法(Newton-Raphson, NR)进行计算。文献[4]在引入频率变量的同时在潮流方程组中增加系统总功率平衡方程,并采用 NR 法求解。文献[5]采用前推回代解法,分别对频率和电压进行两层迭代求解。文献[6]通过在系统中设置平衡节点,分别对频率和电压进行两层迭代,并以平衡节点输出为零作为迭代停止的判据。文献[7]基于类奔德斯分解思想,通过交替迭代求解传统潮流计算子问题和更新下垂节点信息子问题得到潮流解。文献[8]和[9]分别采用信赖域法和三步自适应 Levenberg-Marquart(LM)方法进行求解迭代步长,以改善迭代的收敛性,自适应 LM 法也是属于信赖域法的一种。文献[10]将潮流计算问题转化为无约束优化问题,并采用粒子群算法求解。

以上成果均未计及孤岛微电网的三相不对称性,文献[11]基于序分量计算微电网的三相潮流,但只分析了并网及孤岛主从控制方式的情况。文献[12]对微电网中电压控制型逆变微电源建立了改进 PQ 节点及 PV 节点模型,对电流控制型逆变微电源建立了下垂节点及 PI 节点模型,但对潮流求解算法没有详细阐述。文献[13]提出了一种 NR 法与前推回代法结合的含环网的微电网的三相潮流算法,将环网解环成辐射网进行前推回代计算,再用 NR 法修正解环点和 PV 节点的功率失配量,但算法主要是针对主从控制型微电网,对于下垂控制型其收敛精度有待提高。文献[3]建立了含下垂控制型 DG 的微电网的三相潮流模型,并采用信赖域法求解,但其中需要反复计算海森矩阵,算法较复杂。

考虑到微电网中的不确定性因素,文献[14]采用同伦摄动模态子区间算法对含下垂控制型 DG 及柔性交流输电元件的系统进行区间潮流计算。文献[15]和文献[9]分别采用蒙特卡罗(Monte Carlo, MCS)法及拟 MCS 法对下垂控制孤岛微电网进行概率潮流分析。文献[16]采用 MCS 进行了微电网三相概率

潮流计算,但未考虑下垂控制型结构。近年来,以多项式混沌展开(Polynomial Chaos Expressions, PCE)为代表的代理模型方法被逐渐应用于解决电力系统概率分析问题<sup>[17-19]</sup>。代理模型法的主要思想是通过少量确定性模型评估,为所需响应建立统计意义上等效的表达式,以得到所需响应的统计特征<sup>[17-21]</sup>。文献[17-19]将 PCE 法应用于下垂控制孤岛微电网的概率潮流分析中。但 PCE 在处理高维变量问题时效率较低,容易出现“维数灾”。低秩逼近(low-rank approximation, LRA)法是一种通过正交分解将期望响应表示为秩一函数之和的代理模型方法<sup>[20-21]</sup>。与 PCE 相比, LRA 的代理模型中待求解系数的数量与输入变量的数量呈线性关系,而非指数关系,因此在处理高维问题时更高效。

鉴于此,本文提出了一种基于低秩逼近法的水垂控制孤岛微电网的三相概率潮流计算方法。首先计及频率变化建立下垂控制孤岛微电网的三相潮流模型,基于 NR 法进行求解,并应用最优乘子修正迭代步长以改善其收敛性;进而,采用低秩逼近法,基于相对少量确定性潮流计算样本建立潮流量的代理模型,进而计算其均值、标准差,并可通过大量输入变量样本的代理模型输出,得到其概率密度、累计概率分布等概率特征。

## 1 下垂控制孤岛微电网稳态模型

### 1.1 DG 模型

风力发电机组或光伏发电系统等间歇性 DG 的有功功率受自然条件限制,而无功功率则由其控制策略确定。在潮流计算中,此类 DG 的接入节点可根据控制策略作为 PQ 节点或 PV 节点处理<sup>[15]</sup>。

对等结构的孤岛微电网中,可控型 DG 如微型燃气轮机和燃料电池等,一般都采用下垂控制模式。下垂控制 DG 接入的节点通常称为下垂节点。根据微电网的特点,下垂控制有多种形式。本文以常用的  $P-\omega/Q-V$  下垂特性为例加以说明。

在三相不对称孤岛微电网中,下垂节点满足<sup>[3]</sup>:

$$\begin{cases} P_{\text{Droopi}}^{\Sigma} = \sum_{m=\{a,b,c\}} P_{\text{Droopi}}^m = \frac{\omega_0 - \omega}{m_{\text{Pi}}} \\ Q_{\text{Droopi}}^{\Sigma} = \sum_{m=\{a,b,c\}} Q_{\text{Droopi}}^m = \frac{U_{i0} - U_i}{n_{\text{Qi}}} \end{cases} \quad i \in B_{\text{Droop}} \quad (1)$$

其中,  $P_{\text{Droopi}}^{\Sigma}$ 、 $Q_{\text{Droopi}}^{\Sigma}$  分别为节点  $i$  接入的下垂控制型 DG 输出的三相总有功功率和无功功率;  $P_{\text{Droopi}}^m$ 、 $Q_{\text{Droopi}}^m$  ( $m \in \{a,b,c\}$ ) 分别为其  $m$  相有功功率和无功



功率值； $m_{Pi}$  和  $n_{Qi}$  分别为其有功和无功功率的下垂调节系数； $\omega_0$  和  $U_{i0}$  分别为其空载时频率和电压的基准值； $U_i^1$  为下垂节点  $i$  的正序电压幅值； $\omega$  为系统频率； $B_{\text{Droop}}$  表示下垂节点集合。

值得注意的是，微电网中 DG 的容量往往较小，在潮流计算中如果出现容量越限的情况，需要将其转化为 PQ 节点进行计算。此外，式(1)是 DG 单元输出阻抗呈感性时的下垂控制策略，若某些场合下可能采用  $P$ - $V$  和  $Q$ - $\omega$  或  $P$ - $V$ - $\omega$  和  $Q$ - $V$ - $\omega$  下垂控制，此时只需将式(1)替换为实际输出表达式即可。

### 1.2 三相负荷模型

考虑到负荷的三相不平衡及孤岛微电网中电压和频率波动较大，因此负荷采用计及电压和频率静特性的 ZIP 组合模型。节点  $i$  的负荷可表示为：

$$\begin{cases} P_{Li}^m = P_{Li0}^m \left( A_{Pi}^m \left( \frac{U_i^m}{U_{Li0}} \right)^2 + B_{Pi}^m \frac{U_i^m}{U_{Li0}} + C_{Pi}^m \right) \cdot \\ \quad (1 + k_{Pi}^m (\omega - \omega_{L0})) \\ Q_{Li}^m = Q_{Li0}^m \left( A_{Qi}^m \left( \frac{U_i^m}{U_{Li0}} \right)^2 + B_{Qi}^m \frac{U_i^m}{U_{Li0}} + C_{Qi}^m \right) \cdot \\ \quad (1 + k_{Qi}^m (\omega - \omega_{L0})) \end{cases} \quad (2)$$

$i \in B, m \in \{a, b, c\}$

式中， $P_{Li}^m$ 、 $Q_{Li}^m$  及  $P_{Li0}^m$ 、 $Q_{Li0}^m$  分别为节点  $i$  的  $m$  相负荷的有功和无功功率及其额定值； $U_i^m$  为节点  $i$  的  $m$  相电压幅值； $A_{Pi}^m$ 、 $B_{Pi}^m$ 、 $C_{Pi}^m$  及  $A_{Qi}^m$ 、 $B_{Qi}^m$ 、 $C_{Qi}^m$  分别为  $m$  相负荷 ZIP 模型中有功和无功功率的恒阻抗部分、恒电流部分及恒功率部分的比例系数； $k_{Pi}^m$  和  $k_{Qi}^m$  分别为  $m$  相负荷有功功率和无功功率的频率调节系数； $\omega_{L0}$  和  $U_{Li0}$  分别为负荷额定频率和额定电压，通常标幺值取 1； $B$  为微网所有节点的集合。

### 1.3 三相线路模型

微电网属于配电系统，线路参数常见三相不对称现象，因而线路模型可用三相阻抗矩阵表示<sup>[3]</sup>：

$$z_{ij}^{abc} = \begin{bmatrix} z_{ij}^{aa-n} & z_{ij}^{ab-n} & z_{ij}^{ac-n} \\ z_{ij}^{ba-n} & z_{ij}^{bb-n} & z_{ij}^{bc-n} \\ z_{ij}^{ca-n} & z_{ij}^{cb-n} & z_{ij}^{cc-n} \end{bmatrix} \quad (3)$$

其中， $z_{ij}^{abc}$  为节点  $i$  和  $j$  之间支路的三相阻抗矩阵， $z_{ij}^{pm-n}$  ( $p \in \{a, b, c\}, m \in \{a, b, c\}$ ) 为考虑中性线作用的节点  $i$  和  $j$  之间支路的三相之间的阻抗。

## 2 基于带最优乘子 NR 法的下垂控制孤岛

## 微电网的三相潮流计算

### 2.1 下垂控制型孤岛微电网的三相潮流模型

下垂控制孤岛微电网中，负荷需求由各下垂控制 DG 依据下垂特性联合调整达到系统的平衡，因而潮流模型中无平衡节点，而将含有 PQ 节点、PV 节点和下垂节点 3 种类型的节点。对任意节点  $i$ ，其三相有功和无功功率平衡方程分别可表示为：

$$\begin{cases} \Delta P_i^m = P_{Gi}^m - P_{Li}^m - \\ \quad U_i^m \sum_{j \in B} \sum_{p \in \{a, b, c\}} U_j^p Y_{ij}^{mp} \cos(\theta_{ij}^{mp} + \delta_j^{mp} - \delta_i^{mp}) \\ \Delta Q_i^m = Q_{Gi}^m - Q_{Li}^m + \\ \quad U_i^m \sum_{j \in B} \sum_{p \in \{a, b, c\}} U_j^p Y_{ij}^{mp} \sin(\theta_{ij}^{mp} + \delta_j^{mp} - \delta_i^{mp}) \end{cases} \quad (4)$$

$i \in B, m \in \{a, b, c\}$

其中， $\Delta P_i^m$ 、 $\Delta Q_i^m$  分别为节点  $i$  的  $m$  相有功和无功功率不平衡量； $P_{Gi}^m$  和  $Q_{Gi}^m$  分别为节点  $i$  的  $m$  相 DG 的注入有功和无功功率； $P_{Li}^m$  和  $Q_{Li}^m$  分别为节点  $i$  的  $m$  相负荷的有功和无功功率； $Y_{ik}^{pm}$  和  $\theta_{ik}^{pm}$  分别为节点导纳阵中节点  $i$  的  $p$  相和节点  $k$  的  $m$  相的导纳阵元素的幅值和相角； $\delta_k^{pm}$  和  $\delta_i^{pm}$  分别为节点  $i$  和节点  $k$  的  $p$  相与  $m$  相的电压的相角差。

注意到下垂节点，除满足(4)式的 6 个功率平衡方程外，还需满足其自身的约束条件(1)。根据逆变器的下垂控制原理，下垂节点的三相电压幅值相等，相角对称，但其电压和出力不能预先设定，因此其电压幅值和相角及三相功率均为未知量，由于系统结构和参数的不对称性，下垂控制 DG 的三相出力和满足(1)式，但各相功率并不一定相等。因此每个下垂节点的功率平衡方程组将包含 12 个等式：

$$\begin{cases} U_i^a - U_i^b = 0 \\ U_i^a - U_i^c = 0 \\ \theta_i^a - \theta_i^b - \left( \frac{2\pi}{3} \right) = 0 \\ \theta_i^a - \theta_i^c + \left( \frac{2\pi}{3} \right) = 0 \\ P_{\text{Droopi}}^a + P_{\text{Droopi}}^b + P_{\text{Droopi}}^c - \frac{\omega_0 - \omega}{m_{Pi}} = 0 \\ Q_{\text{Droopi}}^a + Q_{\text{Droopi}}^b + Q_{\text{Droopi}}^c - \frac{U_{i0} - U_i^1}{n_{Qi}} = 0 \end{cases} \quad i \in B_{\text{Droop}} \quad (5)$$

对于每个下垂节点都有 12 个未知量，在采用 NR 法求解过程中雅可比矩阵  $J$  将非常复杂。根据其节点方程的结构对称性，用  $U_{\text{Droopi}}^a$  表示下垂节点

的各相电压幅值, 用  $\theta_{\text{Droopi}}^a$  表示  $a$  相相角, 并将  $b$  和  $c$  相相角分别用  $\theta_{\text{Droopi}}^a - 2\pi/3$  和  $\theta_{\text{Droopi}}^a + 2\pi/3$  代入, 同时将  $P_{\text{Droopi}}^\Sigma$  和  $Q_{\text{Droopi}}^\Sigma$  用下垂特性关系式表示并消去  $P_{\text{Droopi}}^c$  和  $Q_{\text{Droopi}}^c$ , 则下垂节点未知量化简为 6 个  $\{U_{\text{Droopi}}^a, \theta_{\text{Droopi}}^a, P_{\text{Droopi}}^a, P_{\text{Droopi}}^b, Q_{\text{Droopi}}^a, Q_{\text{Droopi}}^b\}$ , 其节点功率平衡方程为:

$$\begin{cases} \Delta P_{\text{Droop}}^a = P_{\text{Droopi}}^a - P_{\text{Li}}^a - P_i^a = 0 \\ \Delta P_{\text{Droop}}^b = P_{\text{Droopi}}^b - P_{\text{Li}}^b - P_i^b = 0 \\ \Delta P_{\text{Droop}}^c = \frac{\omega_0 - \omega}{m_p} - P_{\text{Droopi}}^c - P_{\text{Li}}^c - P_i^c = 0 \\ \Delta Q_{\text{PQ}}^a = Q_{\text{Droopi}}^a - Q_{\text{Li}}^a - Q_i^a = 0 \\ \Delta Q_{\text{PQ}}^b = Q_{\text{Droopi}}^b - Q_{\text{Li}}^b - Q_i^b = 0 \\ \Delta Q_{\text{PQ}}^c = \frac{U_{\text{Droopi}0}^a - U_{\text{Droopi}}^a}{n_Q} - Q_{\text{Droopi}}^c - Q_{\text{Li}}^c - Q_i^c = 0 \end{cases} \quad i \in B_{\text{Droop}} \quad (6)$$

## 2.2 下垂控制孤岛微电网潮流方程的求解

设  $\Delta \mathbf{P}^{abc}$  表示节点的三相有功功率不平衡量列向量,  $\Delta \mathbf{Q}_{\text{PQ}}^{abc}$  表示除 PV 节点外的各节点三相有功功率不平衡量列向量, 并记  $\mathbf{f} = [\Delta \mathbf{P}^{abc} \Delta \mathbf{Q}_{\text{PQ}}^{abc}]^T$ ; 设  $\theta^{abc}$  表示下垂控制节点的  $a$  相电压相角和其它节点的三相电压相角列向量,  $\mathbf{U}^{abc}$  表示下垂控制节点的  $a$  相电压幅值及 PQ 节点的三相电压幅值列向量, 设  $\mathbf{P}_{\text{Droop}}^{ab}$  及  $\mathbf{Q}_{\text{Droop}}^{ab}$  分别表示下垂控制 DG 注入节点的  $a$  相和  $b$  相有功功率及无功功率列向量, 并记  $\mathbf{x} = [\theta^{abc} \mathbf{U}^{abc} \omega \mathbf{P}_{\text{Droop}}^{ab} \mathbf{Q}_{\text{Droop}}^{ab}]^T$ , 则将下垂节点的式(6)与其它节点的式(4)组合得到系统的三相潮流方程组, 可表示为:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = 0 \quad (7)$$

注意到, 对于每个下垂控制节点, 其未知量和方程数均为 6 个; 对于每个 PQ 节点, 电压幅值和相角都未知, 其功率不平衡量表达式对应应有(4)式的 6 个方程; 对 PV 节点, 其电压幅值确定, 相角为未知量, 且由于无功功率未知, 暂不考虑无功功率不平衡量方程, 只将(4)式中的 3 个有功功率不平衡方程列入潮流方程组; 同时, 考虑到节点电压相角中需要任取一个作为参考相角, 而系统频率成为未知量之一, 因此下垂控制孤岛微电网的潮流方程组中未知量个数与方程个数一致。

对此三相潮流方程组, 采用 NR 法求解时的迭代格式可表示为:

$$\begin{cases} \Delta \mathbf{x}^{(k)} = -\mathbf{J}^{-1} \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}^{(k)}) \\ \mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \Delta \mathbf{x}^{(k)} \end{cases} \quad (8)$$

其中  $\mathbf{J} = \partial \mathbf{f} / \partial \mathbf{x}$  为雅克比矩阵。

实践中发现, 采用常规 NR 法求解(7)式表示的三相不平衡孤岛微电网的潮流方程时收敛性较差, 为此本文采用最优乘子优化迭代步长, 改善其收敛性能。不同于常规 NR 法在迭代过程中直接以  $\Delta \mathbf{x}^{(k)}$  修正, 本文以  $\mu^{(k)} \cdot \Delta \mathbf{x}^{(k)}$  作为修正量, 即

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \mu^{(k)} \cdot \Delta \mathbf{x}^{(k)} \quad (9)$$

其中  $\mu^{(k)}$  为第  $k$  步迭代时最优乘子  $\mu$  的取值。最优乘子  $\mu$ , 通过将潮流方程转化为优化问题, 并利用潮流方程泰勒级数展开的高阶信息求得, 其推导过程可参见文献[22]。最优乘子优化修正量, 可提高修正的精确度, 达到改善算法收敛性的效果。

## 3 基于低秩逼近的微电网概率潮流算法

### 3.1 微电网的随机模型

微电网内的随机因素主要有间歇性 DG 出力及负荷功率等。负荷的不确定性本文采用正态分布来描述[15]。本文考虑的间歇性 DG 主要有光伏发电系统及风力发电机组。光伏发电系统的有功功率输出与光照强度  $r$  密切相关:

$$P_{\text{PVG}} = r \cdot A \cdot \eta \quad (10)$$

式中,  $A$  为光伏电池阵列总面积;  $\eta$  是光伏电池方阵的总光电转换效率。光照强度一般可近似视为 Beta 分布, 其概率密度函数为[15]:

$$F(r) = \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \cdot \left(\frac{r}{r_{\max}}\right)^{\alpha-1} \cdot \left(1 - \frac{r}{r_{\max}}\right)^{\beta-1} \quad (11)$$

式中,  $r_{\max}$  为一定时间内的最大光照强度;  $\alpha$  和  $\beta$  是 Beta 分布的形状参数;  $\Gamma$  是 Gamma 函数。

风电机组有功功率  $P_{\text{WT}}$  与风速  $v$  间近似满足:

$$P_{\text{WT}} = \begin{cases} 0 & v \leq v_{\text{ci}} \\ k_1 v + k_2 & v_{\text{ci}} < v \leq v_r \\ P_{\text{WTmax}} & v_r < v \leq v_{\text{co}} \\ 0 & v > v_{\text{co}} \end{cases} \quad (12)$$

其中,  $P_{\text{WTmax}}$  为风电机组的额定功率,  $v_r$  为额定风速,  $v_{\text{ci}}$  和  $v_{\text{co}}$  分别表示风电机组的切出风速和切入风速;  $k_1 = P_{\text{WTmax}} / (v_r - v_{\text{ci}})$ ,  $k_2 = -k_1 v_{\text{ci}}$ 。而风速的概率分布特性常用威布尔分布描述[15]。本文采用双参数威布尔分布, 其概率密度函数为:

$$F(v) = \frac{k}{\lambda} \left(\frac{v}{\lambda}\right)^{k-1} \exp\left[-\left(\frac{v}{\lambda}\right)^k\right] \quad (13)$$

式中  $v$  为风速;  $k$  与  $\lambda$  分别为形状参数及尺度参数。

光伏系统或风电机组在采用恒功率因数控制方式时, 其无功功率的概率分布特性可根据有功功率及功率因数确定。

### 3.2 LRA 方法基本原理

将以上随机因素变量表示为一个输入随机向量  $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_i, \dots, \xi_m)$ , 其边缘分布表示为  $f_{\xi_i}$  ( $i=1, 2, \dots, m$ ), 期望得到的随机响应向量 (即潮流分布) 记为  $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ ,  $Y$  和  $\xi$  之间的关系表示为  $Y = g(\xi)$ 。由于  $n$  维输出向量  $Y$  中的每一个元素均可单独进行低秩逼近, 因此为表达更清晰, 以下分析以  $n=1$  为例进行阐述。

LRA 方法的基本思想是, 将系统确定性响应如本问题中的潮流求解看作“黑盒”, 然后构建一个解析函数代理模型  $g$ , 此模型满足  $Y = g(\xi)$  与系统实际输出响应  $Y$  具有相似的概率特征。

代理模型的构建基于输出响应  $Y = g(\xi)$  的秩  $r$  正则分解, 如下所示:

$$Y \approx Y = g(\xi) = \sum_{l=1}^r b_l \omega_l(\xi) \quad (14)$$

其中,  $b_l$  ( $l=1, \dots, r$ ) 为归一化权重系数;  $\omega_l$  为关于  $\xi$  的秩一函数, 可如下表示:

$$\omega_l(\xi) = \prod_{i=1}^n v_l^{(i)}(\xi_i) \quad (15)$$

其中  $v_l^{(i)}$  为第  $l$  个秩一函数的第  $i$  维单变量函数。通常  $r$  的值较小, 因此式(14)-(15)表示的是一个正则低秩逼近<sup>[20-21]</sup>。进而将  $v_l^{(i)}$  在与  $f_{\xi_i}$  正交的多项式基函数  $\{\phi_k^{(i)}\} (k=1, 2, 3, \dots)$  上展开, 式(14)的秩  $r$  逼近可表示为:

$$Y = g(\xi) = \sum_{l=1}^r b_l \left[ \prod_{i=1}^n \left( \sum_{k=0}^{p_i} z_{k,l}^{(i)} \phi_k^{(i)}(\xi_i) \right) \right] \quad (16)$$

其中,  $\phi_k^{(i)}$  表示第  $i$  个随机输入中第  $k$  阶单变量多项式,  $p_i$  是  $\phi_k^{(i)}$  的最高阶数,  $z_{k,l}^{(i)}$  是第  $l$  个秩一函数中  $\phi_k^{(i)}$  的系数。

### 3.3 LRA 模型的构造

构造(16)中的 LRA 模型, 需要: i. 为每个输入随机变量选择适当的单变量多项式基; ii. 确定多项式系数  $z_{k,l}^{(i)}$  和权重系数  $b_l$ 。

#### 3.3.1 单变量多项式基的选择

为输入随机变量选择合适的多项式基函数, 对于提高 LRA 模型精度至关重要。多项式基函数选择不当, 可能导致较低的收敛速度或需要较高阶的多项式基, 这会限制 LRA 处理高维问题的能力。本文采用文献[21]提出的离散 Stieltjes 过程递归计算  $\xi_i$  的一组单变量正交多项式基。

#### 3.3.2 系数和权重因子的计算

LRA 模型中系数和权重因子的计算, 需要  $M_C$  大小的输入随机变量  $\xi$  的一组样本点  $\xi_C$  及其相应的输出响应样本点  $y_C$ , 这些样本点通常称为实验设计(experimental design, ED)。其具体计算方法中, 序贯校正-更新方案<sup>[23]</sup>所需 ED 样本点较少且计算效率更高, 本文采用此方法求解。该方法由一系列校正步和更新步实现; 在第  $r$  步校正中, 建立新的秩一函数  $\omega_r$ , 而在第  $r$  步更新中, 确定一组权重因子  $(b_1, \dots, b_r)$ 。

校正步: 第  $r$  步校正目的是找到新的秩一张量  $\omega_r$ , 可以通过求解以下最小化问题得到:

$$\begin{aligned} \omega_r &= \arg \min_{w \in W} \|e_{r-1} - w\|_{\xi_C}^2 \\ &= \arg \min_{w \in W} \sum_{m=1}^{M_C} \left[ y^{(m)} - g_{r-1}(\xi^{(m)}) - w(\xi^{(m)}) \right]^2 \end{aligned} \quad (17)$$

其中  $W$  表示秩一张量的空间,  $e_{r-1} = (g - g_{r-1})$  是响应  $Y$  在第  $r-1$  步的逼近误差,  $\|\cdot\|^2$  表示新的一阶张量应用后残差的 2 范数, 下标  $\xi_C$  表示在实验设计样本集  $(\xi_C, y_C)$  上进行最小化。

式(17)的优化问题可采用交替最小二乘法求解<sup>[23]</sup>。依次对每一个  $i$  维分别计算此最优化问题, 则可得相应的系数  $z_r^{(i)} = (z_{0,r}^{(i)}, \dots, z_{p_i,r}^{(i)})$ :

$$z_r^{(i)} = \arg \min_{\zeta \in R^{(p_i+1)}} \left\| e_{r-1} - C_i \left( \sum_{k=0}^{p_i} \zeta_k \phi_k^{(i)} \right) \right\|_{\xi_C}^2 \quad (18)$$

$$C_i = \prod_{j \neq i} v_r^{(j)}(\xi_j) = \prod_{j \neq i} \left( \sum_{k=0}^{p_j} z_{k,r}^{(j)} \phi_k^{(j)}(\xi_j) \right) \quad (19)$$

可以看到, 每个校正步骤中要求解的系数个数为  $\sum_{i=1}^n (p_i + 1)$ , 它与随机变量个数  $n$  呈线性关系。要启动第  $r$  步校正, 需要任意设定  $v_r^{(i)}(\xi_i)$  ( $i=1, \dots, n$ ) 的初值, 本文算例中取为 1.0。

更新步: 在第  $r$  步校正完成之后, 算法进入第  $r$  步更新, 确定新求解的一阶函数  $\omega_r(\xi)$  的权重因



子  $b_r$ , 同时也更新已有的权重因子  $(b_1, \dots, b_{r-1})$ 。更新步骤可以通过求解以下最小化问题来实现。

$$b = \arg \min_{\beta \in R^r} \left\| g - \sum_{l=1}^r \beta_l \omega_l \right\|_{\xi_C}^2 \quad (20)$$

### 3.3.3 最优秩数及多项式阶数的选择

以上校正-更新方案依次添加新的秩一函数以提高式(16)中 LRA 模型的准确性。为确定最优秩数, 可采用相对泛化误差的大小进行衡量。但在 LRA 建模过程中, 对验证集的大量样本进行计算效率较低, 因此常基于 ED 样本采用交叉验证法计算相对泛化误差<sup>[23]</sup>。类似地, 可以通过交叉验证确定多项式的最优阶数<sup>[23]</sup>。

### 3.4 输出响应的统计特征

根据多项式基的正交性, LRA 模型的输出响应的均值和方差可以分别由其多项式系数和加权因子解析计算得到<sup>[23]</sup>:

$$\mu_y = E[g(\xi)] = \sum_{l=1}^r b_l \left( \prod_{i=1}^n z_{0,i}^{(i)} \right) \quad (21)$$

$$\sigma_y^2 = \sum_{l=1}^r \sum_{m=1}^r b_l b_m \prod_{i=1}^n \left[ \left( \sum_{k=0}^{p_i} z_{k,i}^{(i)} z_{k,m}^{(i)} \right) - z_{0,i}^{(i)} z_{0,m}^{(i)} \right] \quad (22)$$

如果只关心输出响应的均值和方差, 可以直接由(21)-(22)计算得到, 而不需要增加样本; 而如果要得到概率密度函数、累积概率分布等统计特性, 则可以对输入随机变量抽样得到大规模, 如  $M_S$  的样本, 并将其代入已求解出的 LRA 模型中, 得到输出响应样本及其统计数据。注意 3.3 节 LRA 模型构建需要确定性潮流计算的样本数  $M_C$  远小于  $M_S$ , 而此处对于  $M_S$  个样本, 只需要代入式(16)的代理模型计算即可得到输出响应的样本, 不需要大量的重复潮流计算工作。

此外, 若需要计及微电网中随机变量的相关性, 可采用 Nataf 变换等方法映射到独立的随机变量空间。首先通过等概率变换将相关性随机变量  $\xi'$  转化为独立随机变量  $\xi$ , 即  $\xi' = T(\xi)$ , 其中  $T$  是可逆的变换。然后, 将模型响应  $Y = g(T^{-1}(\xi'))$  在与  $\xi$  相对应的多项式基上展开。

### 3.5 LRA 概率潮流算法步骤流程

步骤 1: 输入网络数据、随机变量  $\xi'$  的概率分布和参数, 即风速、太阳辐射、负荷功率及其相关矩阵  $\rho$ 。

步骤 2: 根据每个输入随机变量  $\xi'_i$  的概率分布类型确定其单变量多项式  $\phi_i$ 。

步骤 3: 生成一个大小为  $M_C$  的 ED: i. 使用拉丁超立方体采样蒙特卡罗模拟方法在独立的标准空间中生成  $M_C$  个样本  $\xi_C = (\xi^{(1)}, \xi^{(2)}, \dots, \xi^{(M_C)})$ ; ii. 通过逆 Nataf 变换将  $\xi_C$  映射到随机变量的物理空间, 得到; iii) 对  $\xi_C$  进行确定性最优乘子 NR 法潮流计算, 得到潮流输出样本  $y_C = (y^{(1)}, y^{(2)}, \dots, y^{(M_C)})$ , 并将样本集  $(\xi_C, y_C)$  传递到下一步。  $\xi_C' = T(\xi_C)$

步骤 4: 计算系数和加权系数, 建立各期望输出响应的 LRA 模型; 如果对于所有输出响应, LRA 模型均已达到规定的精度, 则转到步骤 6; 否则, 转到步骤 5。

步骤 5: 增加生成新样本  $\Delta M_C$ , 并使用扩大的 ED 样本  $(\xi_C + \Delta \xi_C, y_C + \Delta y_C)$  返回步骤 4。

步骤 6: 分别计算(21)和(22)中所有响应的平均值和方差。

步骤 7: 生成大量样本, 并代入求解出的 LRA 模型(16)评估所有这些样本的输出响应, 计算期望潮流分布数据的统计特征。

## 4 算例及分析

### 4.1 算例介绍

本文采用 25 节点不对称系统孤岛运行作为算例, 其单线图及支路阻抗数据和三相负荷功率详见文献[24]。系统中 13、19 及 25 节点接入表 1 的 3 个下垂控制型 DG, 节点 7 接有额定功率 400kW, 单位功率因数的光伏发电单元; 节点 18 接入额定功率 600kW, 功率因数 0.95 的风力发电机组; 设节点  $i$  负荷模型中  $A_{Pi}^m = A_{Qi}^m = 0.3$ ,  $B_{Pi}^m = B_{Qi}^m = 0.3$ ,  $C_{Pi}^m = C_{Qi}^m = 0.4$ ,  $k_{Pi}^m = 2$ ,  $k_{Qi}^m = -2$  ( $m = \{a, b, c\}$ )。

表 1 下垂控制型 DG 参数(pu.)

Tab. 1 Parameters of droop-controlled DGs in microgrid

DG 号	节点	额定容量	$U_0$	$\alpha_0$	$m_{Pi}$	$n_{Qi}$
1	13	3.5	1.03	1.0	0.003	0.009
2	19	3.0	1.03	1.0	0.010	0.030
3	25	2.5	1.03	1.0	0.005	0.015

### 4.2 确定性潮流算法收敛性分析

设光伏发电功率为零, 不计负荷波动性, 对以上 25 节点孤岛微电网进行确定性潮流计算。考虑到负荷率及负荷的不平衡等因素都会影响三相潮流的收敛性, 为测试算法性能, 将 A 相与 B 相负荷增大到原始数据的  $k$  倍, C 相负荷增大为 3 倍。在

$k$  不同取值情况下, 分别采用本文算法、常规 NR 法、LM 算法、自适应 LM 算法计算潮流。计算数据显示, 当收敛精度取为  $10^{-5}$  时, 常规 NR 及 LM 方法均不收敛, 本文算法与自适应 LM 算法的迭代次数与计算时间如表 3 所示; 限于篇幅, 此处仅给出  $k=1.3$  时四种方法在迭代过程中最大失配量的变化曲线, 如图 1 所示, 图中 ALM 表示自适应 LM 算法; OMNR 表示最优乘子 NR 法。

可见, 自适应 LM 算法需要的迭代次数远大于本文算法, 这是由于自适应 LM 算法在迭代后期靠近潮流解的时候, 自适应因子非常大, 使算法呈现出类似最速下降法的收敛特性。而本文算法收敛速度及计算时间均优于自适应 LM 法。

表 2 25 节点微电网不同负荷条件下的迭代次数与计算时间  
Tab. 2 Iteration number and computation time of load flow for 25-bus microgrid with different loads

	$k$	1	1.1	1.2	1.3
自适应 LM	迭代次数	105	134	100	116
	计算时间(s)	0.856	1.341	0.813	0.956
本文方法	迭代次数	19	19	19	18
	计算时间(s)	0.110	0.153	0.110	0.103

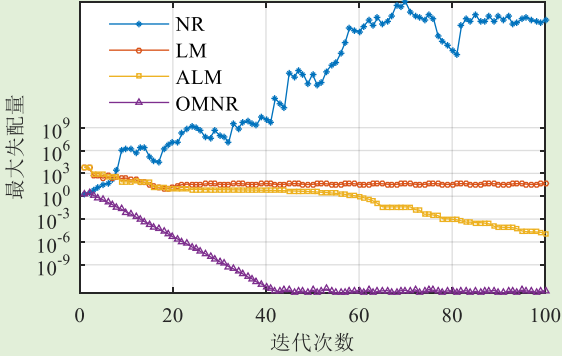


图 1 潮流迭代过程中的最大失配量  
Fig. 1 Maximum mismatches in iterations

为进一步测试算法性能, 将多个以上 25 节点系统连接, 分别构成 49 节点、73 节点和 97 节点微电网 (两系统的首末节点合并为一个节点), 分别采用四种算法计算各微电网的潮流。经测试, 当收敛精度取为  $10^{-5}$  时, 其它三种方法均不收敛, 本文算法收敛的迭代次数与计算时间如表 3 所示; 图 2 给出本文算法与自适应 LM 方法在迭代过程中最大失配量的变化过程。

由表 2 和表 3 及图 1 和图 2 可见, 在常规 NR 法及自适应 LM 法均不收敛的不同参数条件下, 本文算法通过对迭代步长的优化, 达到了改善潮流收敛性的效果。

表 3 不同规模微电网潮流迭代次数与计算时间

Tab. 3 Iteration number and computation time of load flow for microgrids with different scale

节点数	25	49	73	97
迭代次数	18	19	20	28
计算时间(s)	0.105	0.366	0.830	2.077

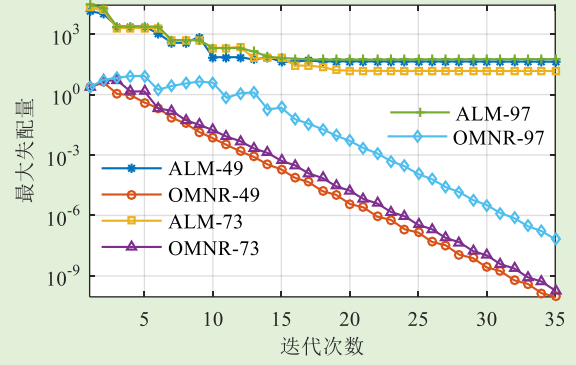


图 2 潮流迭代过程中的最大失配量

Fig. 2 Maximum mismatches in iterations

#### 4.3 概率潮流算法及分析

为分析微电网中的随机因素对潮流分布的影响, 在确定性潮流计算的基础上, 进一步基于 UQLab 工具箱<sup>[25]</sup>设计基于 LRA 方法的概率潮流计算程序对  $k=1.3$  时的 25 节点系统进行算例测试, 并与工具箱中其它代理模型法, 如稀疏 PCE (sparse PCE, sPCE) 法、支持向量回归 (support vector regression, SVR) 法及克里金 (Kriging) 法进行对比。

设负荷服从均值为系统原负荷值, 标准差为原负荷值 5% 的正态分布。设光伏单元安装处的光照强度满足  $\alpha=0.54$ ,  $\beta=2.75$  的 Beta 分布, 风机安装处的风速满足  $k=2.14$ ,  $\lambda=6.05$  的 Weibull 分布。

为测试算法性能, 以样本数  $M_s=10000$  的 MCS 法计算结果作为基准, 将代理模型的结果与基准值进行比较。设蒙特卡罗法计算的平均值和标准差分别记为  $\mu_{MCS}$  和  $\sigma_{MCS}$ , 代理模型 LRA 计算得到的平均值和标准偏差分别记为  $\mu_{LRA}$  和  $\sigma_{LRA}$ 。LRA 法的平均值和标准差的相对误差分别记为  $e_\mu$  和  $e_\sigma$ , 则:

$$e_\mu = \left| \frac{\mu_{MCS} - \mu_{LRA}}{\mu_{MCS}} \right| \times 100\% \quad (40)$$

$$e_\sigma = \left| \frac{\sigma_{MCS} - \sigma_{LRA}}{\sigma_{MCS}} \right| \times 100\%$$

在构造 LRA 模型时, 取最高秩数及多项式阶数均为 10, 校正步中  $I_{rmax}=50$  and  $\Delta e_{rmin}=10^{-6}$ 。ED 样本大小取为 500。分别采用 LRA 法、sPCE 法、SVR 法、Kriging 法与 MCS 法计算, 可得到微电网



的潮流分布的均值和标准差等概率特征。进一步可将  $M_S$  个样本代入构造的 LRA 模型, 得到各潮流参数的概率密度及累积概率分布。

限于篇幅, 表 4 和表 5 分别给出部分节点电压、支路电流、系统频率及下垂控制 DG 的功率等潮流量的均值和标准差的相对误差  $e_\mu$  和  $e_\sigma$  (方法标注于下标)。图 3 及图 4 分别给出节点 7C 相电压及频率的概率密度曲线; 图 5 和图 6 分别为支路 11-13C 相功率及 DG#1 的有功功率的累计概率分布。

从表 4-表 5 可见, 采用 LRA 方法、sPCE 方法、SVR 方法及 Kriging 方法, 得到的各电气量的均值误差都在可接受范围之内, 但标准差的误差, SVR 方法明显较大, 说明其精度较差; 而 LRA、sPCE 及 Kriging 方法均可达到较高精度。除 SVR 方法外, 其它方法得到的概率密度与累积概率分布曲线也与 MCS 所得曲线基本重合。

表 6 给出了各种代理模型方法与 MCS 法的计算时间。其中分别给出了在代理模型方法中代理模型的建立所需要时间以及  $M_S$  个样本的计算时间。可以看出, LRA 法等代理模型法在模型建立后, 对  $M_S$  个样本, 无需反复的潮流计算, 只需要代入代理模型即可, 因此代入代理模型的计算, 主要时间消耗是在代理模型的建立环节。相比其他代理模型方法, LRA 法计算效率方面具有优势, 经测试证明在需要较多 ED 样本点时, 此优势更为显著。

表 4 各代理模型法计算的电气量均值相对误差

Tab. 4 Errors of means by different metamodels

电气量	$e_{\mu\text{PCE}}(\%)$	$e_{\mu\text{SVR}}(\%)$	$e_{\mu\text{Kriging}}(\%)$	$e_{\mu\text{LRA}}(\%)$
$U_{7A}$	2.391E-06	2.653E-04	1.678E-06	3.237E-06
$U_{7C}$	2.780E-06	1.632E-04	1.891E-06	5.280E-06
$U_{25A}$	2.098E-06	9.523E-05	1.505E-06	2.155E-06
$\omega$	1.269E-07	1.063E-05	1.015E-07	1.419E-07
$S_{11-13C}$	5.183E-05	1.697E-02	1.194E-04	1.590E-03
$S_{19-20C}$	2.542E-05	4.282E-03	3.392E-05	4.818E-04
$P_{\text{Droop}1}$	9.733E-05	7.615E-03	3.583E-05	1.416E-03
$P_{\text{Droop}3}$	9.733E-05	7.803E-03	3.461E-05	1.416E-03
$Q_{\text{Droop}1}$	1.249E-05	8.090E-04	5.619E-06	2.936E-04
$Q_{\text{Droop}3}$	1.059E-04	4.805E-03	6.817E-05	2.543E-04

表 5 各代理模型法计算的电气量标准差相对误差

Tab. 5 Errors of standard deviations by different metamodels

电气量	$e_{\sigma\text{PCE}}(\%)$	$e_{\sigma\text{SVR}}(\%)$	$e_{\sigma\text{Kriging}}(\%)$	$e_{\sigma\text{LRA}}(\%)$
$U_{7A}$	0.0057	12.9160	0.0056	0.0163
$U_{7C}$	0.0070	13.8535	0.0066	0.0297
$U_{25A}$	0.0093	12.3099	0.0079	0.0314
$\omega$	0.0052	12.4637	0.0011	0.0099
$S_{11-13C}$	0.0008	12.5597	0.0028	0.0057
$S_{19-20C}$	0.0010	12.7164	0.0017	0.0177
$P_{\text{Droop}1}$	0.0052	12.3660	0.0039	0.1640
$P_{\text{Droop}3}$	0.0052	12.4001	0.0039	0.1640
$Q_{\text{Droop}1}$	0.0021	12.7822	0.0021	0.0328
$Q_{\text{Droop}3}$	0.0093	12.2995	0.0065	0.0070

表 6 算法效率对比

Tab. 6 Comparison of computation efficiency

方法	建模时间(s)	样本计算(s)	总时间(s)
LRA	83.875	1.597	85.472
sPCE	114.453	0.281	114.734
SVR	1160.631	1.866	1162.497
Kriging	1023.051	3.563	1026.614
MC		1361.728	1361.728

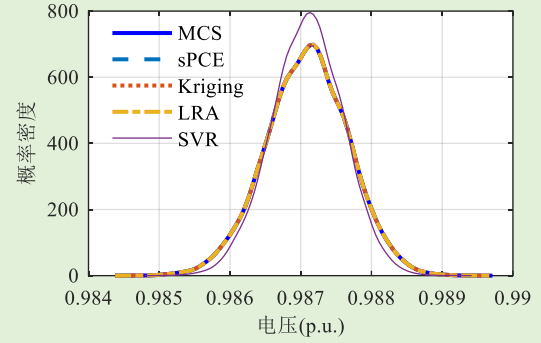


图 3 节点 7C 相电压幅值的概率密度曲线

Fig. 3 Probability density curves for voltage amplitude of phase C at Node 7

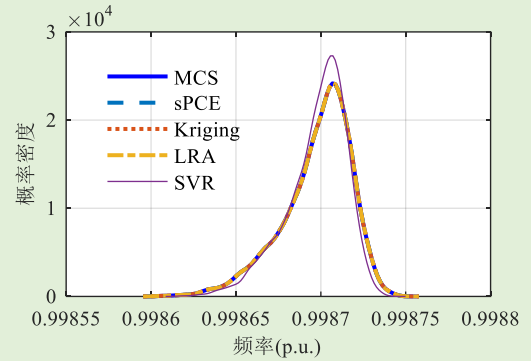


图 4 系统频率的概率密度曲线

Fig. 4 Probability density curves of frequency

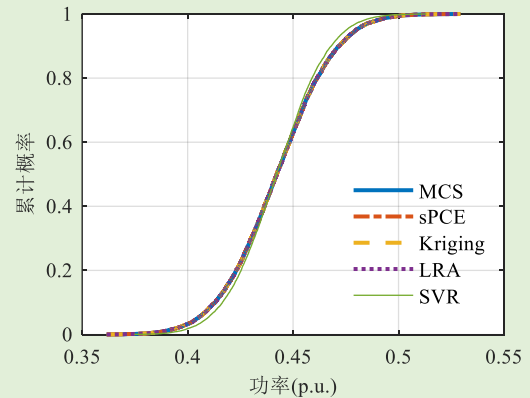


图 5 支路 11-13C 相功率的累积概率分布曲线

Fig. 5 Cumulative probability distribution curves for power in phase C of Branch 11-13

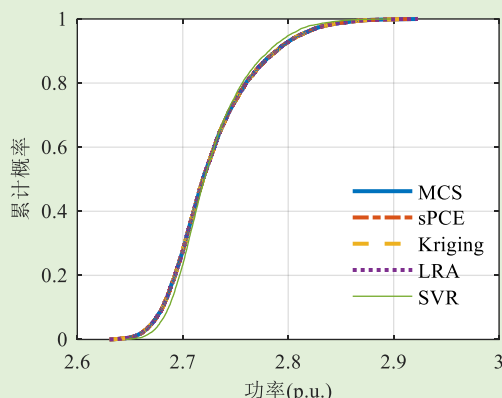


图6 DG#1的有功功率累积概率分布曲线

Fig. 6 Cumulative probability distribution curves for active power of DG#1

## 5 结论

本文针对三相不对称的下垂控制孤岛微电网，提出了一种基于最优乘子NR法及基于低秩逼近法的概率潮流计算方法。首先计及频率变量建立微电网潮流模型，并在NR法求解中基于泰勒展开式的高阶项信息计算最优乘子，优化修正量。进而，基于低秩逼近方法，通过相对少量确定性潮流计算样本建立统计意义上等效的代理模型来分析潮流分布的概率特征。算例数据结果表明：

1) 采用常规NR法求解三相不对称的下垂控制孤岛微电网的潮流时，很容易出现不收敛现象，而采用最优乘子优化迭代步长后，其收敛性显著改善，算例数据显示本文算法具有更好的收敛性；且最优乘子只需在常规NR法的迭代中增加很小的计算量即可得到，同样收敛条件下，本文算法计算时间效率优于自适应LM法。

2) 基于LRA算法，通过对少量样本的确定性潮流计算，可建立所关心电气量的代理模型，并得到其均值和方差；进而计算代理模型对大量输入样本的输出，不需要大量反复潮流计算即可得到输出变量的概率密度和累计概率分布信息。算例结果证明了算法的计算精度及在计算效率方面的优势。

关于微电网的三相不平衡，本文算法主要考虑了线路及负荷的不对称性等因素。在逆变器的控制方面有多种不平衡抑制措施，控制策略不同，对应DG的模型也将不同。篇幅所限，本文仅对最常用的下垂控制进行了分析。此外本文目前对下垂控制DG仅粗略考虑其外特性，需要研究其具体特性进行详细建模，后续工作中将进一步深入探讨。

## 参考文献

- [1] 彭寒梅, 曹一家, 黄小庆, 等. 无平衡节点孤岛运行微电网的连续潮流计算[J]. 中国电机工程学报, 2016, 36(8): 2057-2067.  
Peng Hanmei, Cao Yijia, Huang Xiaoqing, et al. Continuous power flow for islanding microgrid without balance nodes[J]. Proceedings of the CSEE, 2016, 36(8): 2057-2067(in Chinese).
- [2] Abdelaziz M M A, Farag H E, El-Saadany E F, et al. A novel and generalized three-phase power flow algorithm for islanded microgrids using a Newton trust region method[J]. IEEE Transactions on Power Systems, 2013, 28(1): 190-201.
- [3] 刘杨华, 吴政球. 孤岛运行的微电网潮流计算方法研究[J]. 电力系统保护与控制, 2010, 38(23): 16-20.  
Liu Yanghua, Wu Zhengqiu. Study on power flow calculation method for islanding micro grids[J]. Power System Protection and Control, 2010, 38(23): 16-20(in Chinese).
- [4] Mumtaz F, Syed M H, Hosani M A, et al. A novel approach to solve power flow for islanded microgrids using modified Newton Raphson with droop control of DG[J]. IEEE Transactions on Sustainable Energy, 2015, 7(2): 493-503.
- [5] Diaz G, Gomez-Aleixandre J, Coto J. Direct backward/forward sweep algorithm for solving load power flows in AC droop-regulated microgrids[J]. IEEE Transactions on Smart Grid, 2016, 7(5): 2208-2217.
- [6] Georgios C Kryonidis, Eleftherios O. Kontis, Andreas I. Chrysoschos, et al. Power flow of islanded AC microgrids: revisited[J]. IEEE Transactions on Smart Grid, 2018, 9(4): 3903-3905.
- [7] 李培帅, 施焱, 吴在军, 等. 孤岛微电网潮流的类奔德斯分解算法[J]. 电力系统自动化, 2017, 41(14): 119-125.  
Li Peishuai, Shi Ye, Wu Zaijun, et al. Power flow calculation method similar to Benders decomposition for islanded microgrid[J]. Automation of Electric Power Systems, 2017, 41(14): 119-125(in Chinese).
- [8] 彭寒梅, 曹一家, 黄小庆. 基于BFGS信赖域算法的孤岛微电网潮流计算[J]. 中国电机工程学报, 2014, 34(16): 2629-2638.  
Peng Hanmei, Cao Yijia, Huang Xiaoqing. Power flow calculation of islanded microgrids based on BFGS trust region method[J]. Proceedings of the CSEE, 2014, 34(16): 2629-2638(in Chinese).
- [9] 王晗, 严正, 徐潇源, 等. 计及可再生能源不确定性的孤岛微电网概率潮流计算[J]. 电力系统自动化, 2018, 42(15): 110-117+256-264.  
Wang Han, Yan Zheng, Xu Xiaoyuan, et al. Probabilistic

- power flow analysis of microgrid with renewable energy[J]. *Automation of Electric Power Systems*, 2018, 42(15): 110-117+256-264.
- [10] Esmali A, Abedini M, Moradi M H. A novel power flow analysis in an islanded renewable microgrid [J]. *Renewable Energy*, 2016, 96: 914-927.
- [11] Kamh M Z, Iravani R. Unbalanced model and power-flow analysis of microgrids and active distribution systems[J]. *IEEE Transactions on Power Delivery*, 2010, 25(4): 2851-2858.
- [12] 王聪, 颜伟, 赵霞, 等. 考虑逆变电源控制模式的微电网三相潮流模型[J]. *中国电机工程学报*, 2015, 35(12): 2960-2967.  
Wang Cong, Yan Wei, Zhao Xia, et al. Three-phase power flow model for microgrid considering inverter control modes[J]. *Proceedings of the CSEE*, 2015, 35(12): 2960-2967(in Chinese).
- [13] Wang X, Shahidehpour M, Jiang C, et al. Three-phase distribution power flow calculation for loop-based microgrids[J]. *IEEE Transactions on Power Systems*, 2018, 33(4): 3955-3967.
- [14] 詹昕, 吴思, 向铁元, 等. 同伦摄动模态子区间算法在微电网孤岛潮流计算中的应用[J]. *电工技术学报*, 2017, 32(5): 152-164.  
Zhan Xin, Wu Si, Xiang Tieyuan, et al. Application of homotopy perturbation modal subinterval algorithm in power flow computation of islanded micro-grid[J]. *Transactions of China Electrotechnical Society*, 2017, 32(5): 152-164(in Chinese).
- [15] Pan Z, Shi M, Wu Y, et al. Probabilistic load flow of islanded microgrid with droop-controlled distributed generations[C]. *IEEE PES Asia-Pacific Power and Energy Engineering Conference*, Xi'an, China, 2016.
- [16] 张美霞, 陈洁, 杨秀, 等. 考虑风光和负荷随机性的微电网三相潮流计算[J]. *中国电机工程学报*, 2013, 33(13): 101-107.  
Zhang Meixia, Chen Jie, Yang Xiu, et al. Three-phase power flow calculation for microgrid with volatile wind power, photovoltaic power and load[J]. *Proceedings of the CSEE*, 2013, 33(13): 101-107(in Chinese).
- [17] Wang H, Yan Z, Xu X, et al. Probabilistic power flow analysis of microgrid with renewable energy[J]. *International Journal of Electrical Power & Energy Systems*, 2020, 114: 105393.
- [18] 何琨, 徐潇源, 严正, 王晗, 洪元瑞. 基于稀疏多项式混沌展开的孤岛微电网概率潮流计算[J]. *电力系统自动化*, 2019, 43(02): 67-79.  
He Kun, Xu Xiaoyuan, Yan Zheng, et al. Probabilistic power flow calculation of islanded microgrid based on sparse polynomial chaos expansion[J]. *Automation of Electric Power Systems*, 2019, 43(02): 67-79(in Chinese).
- [19] Wang H, Yan Z, Xu X, et al. Evaluating influence of variable renewable energy generation on islanded microgrid power flow[J]. *IEEE Access*, 2018: 71339-71349.
- [20] Konakli K, Sudret B. Polynomial meta-models with canonical low-rank approximations: numerical insights and comparison to sparse polynomial chaos expansions [J]. *Journal of Computational Physics*, 2016: 1144-1169.
- [21] Sheng H, Wang X. Probabilistic power flow calculation using non-intrusive low-rank approximation method[J]. *IEEE Transactions on Power Systems*, 2019, 34(4): 3014-3025.
- [22] 王宪荣, 包丽明, 柳焯. 极坐标系准最优乘子病态潮流解法研究, *中国电机工程学报*, 1994, 14(1): 40-45.  
Wang Xianrong, Bao Liming, Liu Zhuo. The study of ill-conditioned load flow using quasi-optimal factor in polar coordinates[J]. *Proceedings of the CSEE*, 1994, 14(1): 40-45(in Chinese).
- [23] Chevreuil M, Lebrun R, Nouy A, et al. A least-squares method for sparse low rank approximation of multivariate functions[J]. *SIAM/ASA Journal on Uncertainty Quantification*, 2015, 3(1): 897-921.
- [24] Raju G K V, Bijwe P R. Efficient reconfiguration of balanced and unbalanced distribution systems for loss minimisation[J]. *IET Generation, Transmission & Distribution*, 2008, 2(1): 7-12.
- [25] S. Marelli, and B. Sudret, UQLab: A framework for uncertainty quantification in Matlab[C]. *International Conference on Vulnerability, Risk Analysis and Management*, Liverpool, United Kingdom, 2014.