

**Eine holomorphe Untersuchung des
verallgemeinerten Seiberg-Witten-Modulraumes
für Gibbons-Hawking-Faserungen**

Diplomarbeit

vorgelegt von
Kirstin Strokorb
aus Stendal

angefertigt am
Mathematischen Institut
der Georg-August-Universität Göttingen
2009/2010

Danksagung

Es ist nicht gut, daß der Mensch alleine sei, und besonders nicht, daß er alleine arbeite; vielmehr bedarf er der Teilnahme und Anregung, wenn etwas gelingen soll.

Johann Wolfgang von Goethe

Zum Gelingen dieser Arbeit haben viele beigetragen, denen ich an dieser Stelle dafür danken möchte: Herr Professor Victor Pidstrygach hat mich an die interessante Thematik herangeführt, die mich mit vielen mathematischen Gebieten in Berührung gebracht hat. Ich danke ihm auch für die freundliche Betreuung meiner Arbeit und natürlich den vielen Tee, der nötig war, um diese Arbeit entstehen zu lassen. Teilnahme und Anregung habe ich immer wieder von Henrik Schumacher und Martin Callies erfahren, wenn wir in unserer Arbeitsgruppe diskutierten. Herrn Professor Ignasi Mundet Riera danke ich für unseren Austausch zu komplexen Strukturen auf Faserbündeln. Herr Professor Stefan Bauer war so freundlich, die Korreferenz für diese Arbeit zu übernehmen. Carsten Thiel und Kristin Stroth danke ich zudem für manchen (la-)technischen Support, überhaupt allen meinen Freunden für die schöne Studienzeit. Nicht zuletzt hat mich die Begeisterung von Herrn Dr. Wolfgang Ludwicki für die Mathematik und die Geometrie im Besonderen zu meinem Mathematik-Studium geführt. Mein ganz persönlicher Dank gilt Ulrich Pennig, der soviel Geduld mit meiner Ungeduld hatte, und meiner Schwester Christiane Strokorb für die häufige Umzugshilfe, die viel mehr als das war. Meiner Familie danke ich für ihre immer währende Unterstützung.

$$\begin{bmatrix} \cos 90^\circ & \sin 90^\circ \\ -\sin 90^\circ & \cos 90^\circ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

¹<http://xkcd.com/184/>

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	1
1 Grundlagen	7
1.1 Kählergeometrie	7
1.1.1 Hyperkählergeometrie	8
1.2 Differentialformen auf komplexen Mannigfaltigkeiten	8
1.3 Gruppenwirkungen	10
1.3.1 Reduktion	11
1.4 Holomorphe Geradenbündel und Divisoren	11
2 Der Seiberg-Witten-Modulraum im Kähler-Fall	15
2.1 $\text{Spin}^{\mathbb{C}}$ -Strukturen und Spinorbündel	15
2.2 Zusammenhänge auf den Spinorbündeln	18
2.2.1 Die Wirkung der Eichgruppe auf den Zusammenhängen	19
2.3 Dirac-Operatoren	21
2.3.1 Komplex-geometrische Beschreibung der Dirac-Operatoren	23
2.4 Eine quadratische Abbildung	24
2.5 Die Seiberg-Witten-Gleichungen	26
2.6 Holomorphe Beschreibung des Modulraumes	26
2.6.1 Holomorphe Zusammenhänge	27
2.6.2 Der Seiberg-Witten-Modulraum	28
3 Verallgemeinerte Seiberg-Witten-Gleichungen	37
3.1 Das lineare Modell der Faser	37
3.2 Gibbons-Hawking-Räume als Faser	40
3.2.1 Beschreibung in Karten	40
3.2.2 Ein Beispiel von Eguchi und Hanson	47
3.3 Ein nicht-linearer Dirac-Operator	50
3.3.1 Verallgemeinerung der kovarianten Ableitung	50
3.3.2 Verallgemeinerung der Clifford-Multiplikation	52
3.4 Verallgemeinerte Seiberg-Witten-Gleichungen	57
3.5 Die Wirkung der Eichgruppe	57
4 Der verallgemeinerte Seiberg-Witten-Modulraum	61
4.1 Eine Weitzenböck-Formel	61
4.1.1 Beschreibung der Clifford-Multiplikation durch u^*F	61
4.1.2 Zusammenhänge auf u^*F	66

4.1.3	Die verallgemeinerte Weitzenböck-Formel	69
4.2	Holomorphe Beschreibung des verallgemeinerten Modulraumes	77
4.2.1	Komplexe Struktur auf dem verallgemeinerten Spinorbündel	77
4.2.2	Holomorphie der verallgemeinerten Spinoren des Lösungsraumes	81
4.2.3	Fallunterscheidung nach Sphären im Gibbons-Hawking-Raum	82
4.2.4	Algebraisch-geometrische Fallunterscheidung im Sphärenfall	92
A	Anhang	95
A.1	Konventionen zu Vektorbündeln und Darstellungen	95
A.2	Konventionen zur Indizierung	98
	Literaturverzeichnis	99
	Index	101

Einleitung

Seit Witten 1994 erstmalig die Seiberg-Witten-Gleichungen formuliert hat [22], haben sich diese bei der Klassifikation glatter 4-Mannigfaltigkeiten als sehr nützliches Werkzeug erwiesen. Insbesondere liefert die Seiberg-Witten-Eichtheorie bis dato nur vermutete Verbindungen zwischen komplex analytischen und glatten Invarianten [4]. Nach einer Idee von Pidstrygach [17] untersuchen wir eine Verallgemeinerung der Seiberg-Witten-Gleichungen für den Fall, dass die Basismannigfaltigkeit M eine Kähler-Struktur zulässt, und erarbeiten eine algebraisch-geometrische Beschreibung des zugehörigen Modulraumes.

Der Text gliedert sich in vier Kapitel. Zunächst klären wir einige grundlegende Begriffe und Notationen zur komplex analytischen Geometrie. Im zweiten Kapitel wiederholen wir die Theorie der Seiberg-Witten-Gleichungen für den klassischen Kähler-Fall und formulieren einige Beweise aus [14] ausführlicher. Im dritten Kapitel erarbeiten wir das Setup für die neue Theorie und im vierten Kapitel analysieren wir den gerade definierten verallgemeinerten Modulraum, insbesondere im Hinblick auf komplex analytische Aspekte.

Für das neue Setup liefern die Hyperkählerstruktur und einige Gruppenwirkungen auf \mathbb{H} einen Blickwinkel auf die klassische Situation, den wir dahingehend verallgemeinern, dass wir die Faser im positiven Spinorbündel durch eine Hyperkählermannigfaltigkeit mit spezieller Gruppenwirkung austauschen. Diese Verallgemeinerung ist bereits in [21] zu finden. Bei den neuen Fasermannigfaltigkeiten, die in der Literatur als Gibbons-Hawking-Räume oder „ k -center gravitational multi-instantons“ bekannt sind, greifen wir ebenfalls auf eine Beschreibung aus [21] zurück und weisen die erforderlichen Eigenschaften explizit nach. Im Eguchi-Hanson-Fall (2-center-Gibbons-Hawking) vollziehen wir die Beschreibung als Hyperkähler-Reduktion von \mathbb{H}^2 nach. Um einen Dirac-Operator für dieses neue Spinorbündel zu erhalten, verallgemeinern wir kovariante Ableitung und Clifford-Multiplikation. Damit steht der Formulierung von verallgemeinerten Seiberg-Witten-Gleichungen nichts mehr im Wege. Schließlich zeigen wir, dass die Eichgruppe $C^\infty(M, S^1)$ wie im linearen Fall auf den Lösungen der verallgemeinerten Seiberg-Witten-Gleichungen operiert und somit einen verallgemeinerten Modulraum definiert.

Im vierten Kapitel leiten wir zunächst eine verallgemeinerte Weitzenböck-Formel her. Mit einer technischen Umformulierung machen wir dabei die Methoden aus [17] für unsere Situation nutzbar. Diese Weitzenböck-Formel erlaubt es uns, die Holomorphie verallgemeinerter Spinoren zu zeigen, indem wir auf eine zusätzliche Symmetrie auf den Lösungen der verallgemeinerten Seiberg-Witten-Gleichungen schließen. Schließlich können wir auch Aussagen über den Wertebereich verallgemeinerter Spinoren treffen und die Verbindung zur algebraischen Geometrie auf die eindeutige Lösbar-

keit einer Familie von nicht-linearen Differentialgleichungen reduzieren, welche der Kazdan-Warner-Gleichung [11] sehr ähnlich sehen.

Überblick

Der klassische Kähler-Fall Betrachten wir kurz die klassische Situation ([22], [4], [14], [16]): Sei M eine Kählerfläche mit Kählerform ω_M . Das positive Spinorbündel W_L^+ splittet in $W_L^+ = \mathcal{L} \oplus K_M^{-1} \otimes \mathcal{L}$, wobei \mathcal{L} ein komplexes Geradenbündel ist und K_M^{-1} das antikanonische Geradenbündel. Sei weiter (A, ψ) ein Paar bestehend aus einem Hermiteschen Zusammenhang A auf dem Determinantenbündel $\mathcal{L}_{\det}^L = K_M^{-1} \otimes \mathcal{L}^2$ von W_L^+ und einem positiven Spinor $\psi = \alpha + \beta$ (bezüglich obiger Zerlegung von W_L^+). Dann vereinfachen sich die Seiberg-Witten Gleichungen wie folgt:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{D}^A \psi = 0 \\ c(F_A^+) = \langle \psi, \cdot \rangle \psi - \frac{1}{2} |\psi|^2 \mathbf{1}_{W^+} \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} \bar{\partial}_B \alpha + \bar{\partial}_B^* \beta = 0 \\ (F_A^+)^{1,1} = \frac{i}{4} (|\alpha|^2 - |\beta|^2) \omega_M \\ F_A^{0,2} = \frac{1}{2} \bar{\alpha} \beta \end{array} \right. \quad (\star)$$

Hierbei bezeichnet \mathcal{D}^A den mit A gekoppelten Dirac-Operator und F_A die Krümmung von A . Der Hermitesche Zusammenhang A entspricht vermöge $A = \phi \otimes B^2$ eindeutig einem Hermiteschen Zusammenhang B auf \mathcal{L} , wobei ϕ der vom Levi-Civita-Zusammenhang induzierte Zusammenhang auf K_M^{-1} ist. Weiterhin wirkt die Eichgruppe $C^\infty(M, S^1)$ auf den Lösungen (A, ψ) dieser Gleichungen und somit ist ein Modulraum \mathcal{M}_L definiert.

Es stellt sich heraus, dass das Zusammenspiel dieser Gleichungen zu einem holomorphen Blickwinkel führt: Wenn der Grad des Determinantenbündels nicht verschwindet², tritt einer der folgenden Fälle ein:

Fall 0: $\deg(\mathcal{L}_{\det}) < 0$

$$(\star) \iff \left\{ \begin{array}{l} A \text{ ist holomorph,} \\ 0 \neq \psi = \alpha \in \Gamma(\mathcal{L}) \\ \text{ist holomorph bzgl. } A, \\ (F_A^+)^{1,1} = \frac{i}{4} |\alpha|^2 \omega_M \end{array} \right.$$

Fall 1: $\deg(\mathcal{L}_{\det}) > 0$

$$(\star) \iff \left\{ \begin{array}{l} A \text{ ist holomorph,} \\ 0 \neq \psi = \beta \in \Gamma(K_M^{-1} \otimes \mathcal{L}) \\ \text{ist antiholomorph bzgl. } A, \\ (F_A^+)^{1,1} = -\frac{i}{4} |\beta|^2 \omega_M \end{array} \right.$$

Schließlich zeigt ein Resultat von Kazdan and Warner [11], dass die Lösungen von (\star) eindeutige Representanten in einem größeren Konfigurationsraum mit komplexifizierter Eichgruppe $C^\infty(M, \mathbb{C}^*)$ sind. Das ermöglicht eine explizite Beschreibung des Modulraumes durch Divisoren und charakteristische Klassen:

Fall 0: $\mathcal{M}_L \cong \{ \text{effektive Divisoren } D, \text{ so dass } c_1(\mathcal{O}_M(D)) = c_1(\mathcal{L}) \}$

Fall 1: $\mathcal{M}_L \cong \{ \text{effektive Divisoren } D, \text{ so dass } c_1(\mathcal{O}_M(D)) = c_1(K_M \otimes \mathcal{L}^{-1}) \}$

² Andernfalls $(\star) \Leftrightarrow (\psi = 0 \text{ and } F_A^+ = 0)$ und der Modulraum \mathcal{M}_L fällt mit dem Modulraum der antiselbstdualen Zusammenhänge zusammen.

Die Verallgemeinerung Die Idee der Verallgemeinerung von Pidstrygach [17] besteht darin, die lineare Faser im Spinorbündel durch eine geeignete Hyperkählermannigfaltigkeit zu ersetzen. Prinzipiell kommen dafür solche Fasermannigfaltigkeiten infrage, die eine isometrische Wirkung der Holonomiegruppe der Basismannigfaltigkeit zulassen. In dieser Arbeit betrachten wir den Fall, dass die Basismannigfaltigkeit Kähler ist. Entsprechend sind die Anforderungen an die Isometriegruppe der Fasermannigfaltigkeit weniger restriktiv als für allgemeinere $\text{Spin}^{\mathbb{C}}$ -Mannigfaltigkeiten.

Genauer zerfällt das positive Spinorbündel W_L^+ im klassischen Kähler-Fall in zwei Hermitesche Geradenbündel. Deshalb schreiben wir mit einem geeigneten $S^1 \times S^1$ -Bündel Q_L auch $W_L^+ = Q_L \times_{S^1 \times S^1} \mathbb{C}^2$. Außerdem können wir die meisten Terme, die in das klassische Setup eingehen, umformulieren, indem wir die Hyperkählerstruktur auf $\mathbb{C}^2 \cong \mathbb{H}$ sowie eine quaternionsche Momentenabbildung einbeziehen, die wir aus der Hamiltonschen diagonalen Operation von S^1 auf \mathbb{C}^2 erhalten. Für die Verallgemeinerung ersetzen wir nun die Faser $\mathbb{C}^2 \cong \mathbb{H}$ durch eine Hyperkähler-4-Mannigfaltigkeit (X, g, I, J, K) , die eine isometrische $S^1 \times S^1$ -Wirkung zulässt, welche ähnliche Eigenschaften wie die $S^1 \times S^1$ -Wirkung auf der linearen Faser erfüllt – zum Beispiel dieselben Relationen mit (I, J, K) . Wir verlangen weiter, dass die diagonale S^1 -Operation Hamiltonsch ist und uns drei Momentenabbildungen (μ_I, μ_J, μ_K) bereitstellt, welche X an den regulären Punkten als S^1 -Hauptfaserbündel beschreiben. Jeder k -center-Gibbons-Hawking-Raum ist ein Beispiel für eine solche Hyperkählermannigfaltigkeit, darunter die lineare Faser \mathbb{C}^2 als 1-center-Gibbons-Hawking-Raum selbst [7]. Eine explizite Konstruktion kann [21] entnommen werden. Wir bemerken weiter, dass für diese Mannigfaltigkeiten das Urbild $\mu_{\mathbb{C}}^{-1}(0)$ unter der I -holomorphen Abbildung $\mu_{\mathbb{C}} = \mu_J + i\mu_K$ sich von zwei sich schneidenden Geraden (lineare Faser) zu einer Kette von 2-Sphären mit zwei „offenen“ äußeren Randsphären ändert (allgemeiner Gibbons-Hawking Raum, vergleiche Abbildung 0.1).

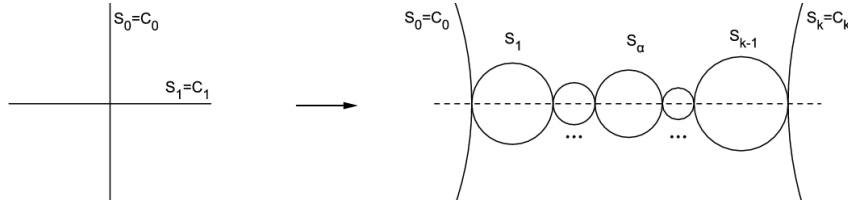


Abbildung 0.1 Die Niveaumenge $\mu_{\mathbb{C}}^{-1}(0) \subset X$ im Gibbons-Hawking-Raumes X

Indem wir die kovariante Ableitung und die Cliffordmultiplikation verallgemeinern, erhalten wir einen nicht-linearen Dirac-Operator \mathcal{D}_X^A und somit das foldende Analogon zu den klassischen Seiberg-Witten-Gleichungen:

$$\begin{cases} \mathcal{D}_X^A \psi &= 0 \\ (F_A^+)^{1,1} &= \frac{i}{2} \mu_I(\psi) \omega_M \\ F_A^{0,2} &= \frac{i}{2} \mu_{\mathbb{C}}(\psi) \end{cases} \quad (**)$$

Hierbei bezeichnet ψ einen verallgemeinerten Spinor. Wieder wirkt die Eichgruppe $C^\infty(M, S^1)$ auf den Lösungen (A, ψ) von $(\star\star)$ und definiert somit einen neuen Modulraum $\mathcal{M}_{L,X}$.

Ergebnisse und Ausblick In diesem verallgemeinerten Setup beweisen wir eine Weitzenböck-Formel in L^2 -Normen ähnlich wie in [17]. Damit schließen wir auf eine zusätzliche Symmetrie auf den Lösungen (A, ψ) des Systems $(\star\star)$. Ähnlich wie in [9] folgern wir:

- a) Wenn (A, ψ) das System $(\star\star)$ löst, dann ist $\mu_{\mathbb{C}}(\psi) = 0$ und A ein holomorpher Zusammenhang.
- b) Wenn A ein holomorpher Zusammenhang ist, dann ist die erste Gleichung $\mathcal{D}_X^A \psi = 0$ von $(\star\star)$ äquivalent zur Holomorphie des verallgemeinerten Spinors ψ bezüglich A .

Weiterhin impliziert die zusätzliche Symmetrie und die Holomorphie der Lösungen von $(\star\star)$, dass der Grad des Determinantenbündels wiederum eine Fallunterscheidung vorgibt:

- c) Wenn (A, ψ) eine Lösung von $(\star\star)$ ist, so ist entweder $\mu_I(\psi)$ konstant³ oder das Bild von ψ liegt in genau einer der Sphären S_α . Im letzteren Fall bestimmen die Gibbons-Hawking-Zentren eine Unterteilung von \mathbb{R} in offene Intervalle I_α , so dass für $\alpha = 0, \dots, k$:

Fall α : $\deg(\mathcal{L}_{\det}) \in I_\alpha$, dann sind äquivalent

$$(\star\star) \iff \begin{cases} A \text{ ist holomorph,} \\ \psi \in \Gamma(Q_L \times_{S^1 \times S^1} S_\alpha) \text{ is holomorph bzgl. } A \\ \text{und bildet nicht konstant auf ein Gibbons-Hawking-Zentrum ab,} \\ (F_A^+)^{1,1} = \frac{i}{2} \mu_I(\psi) \omega_M \end{cases}$$

Indem wir explizite Biholomorphismen für die punktierten Sphären $S_\alpha \cong \mathbb{C}P^1$ für $\alpha = 1, \dots, k-1$ und $S_\alpha \cong \mathbb{C}$ für $\alpha = 0, k$ konstruieren, können wir die obigen Faserbündel als holomorphe Bündel identifizieren:

$$Q_L \times_{S^1 \times S^1} S_0 = \mathcal{L} \quad Q_L \times_{S^1 \times S^1} S_\alpha = \mathbb{P}(K_M^\alpha \oplus \mathcal{L}) \quad Q_L \times_{S^1 \times S^1} S_k = K_M^k \otimes \mathcal{L}^{-1}$$

Diese Biholomorphismen können nicht isometrisch gewählt werden, auch wenn die $S^1 \times S^1$ -Wirkung sich zu einer isometrischen Wirkung übersetzt. Somit erhalten wir schließlich einige nicht-lineare Differentialgleichungen, die sich nur wenig von

³Dann gilt $\mathcal{M}_{L,X} \cong \{ A \mid F_A^+ = i c \omega_M \}$ für eine Konstante $c \in \mathbb{R}$, die vom getroffenen Gibbons-Hawking-Zentrum abhängt. Vergleiche mit dem linearen Fall, bei dem wir nur ein einziges Zentrum haben und $c = 0$ ist.

den Kazdan-Warner-Gleichungen unterscheiden, und die, wenn sie eindeutige glatte Lösungen haben, ähnliche Resultate wie im linearen Fall implizieren, d. h. eine Formulierung des Modulraumes durch Divisoren und charakteristische Klassen. Insbesondere erwarten wir

Fall 0: $\mathcal{M}_{L,X} \cong \{ \text{effektive Divisoren } D, \text{ so dass } c_1(\mathcal{O}_M(D)) = c_1(\mathcal{L}) \}$

Fall k: $\mathcal{M}_{L,X} \cong \{ \text{effektive Divisoren } D, \text{ so dass } c_1(\mathcal{O}_M(D)) = c_1(K_M^k \otimes \mathcal{L}^{-1}) \}$

für die äußeren „offenen“ Sphären. Desweiteren legt das verallgemeinerte Setup nahe, dass auch nicht-effektive Divisoren zum Modulraum gehören könnten. Zudem erwarten wir weitere Resultate durch Variieren von Anzahl und Konstellation der Gibbons-Hawking-Zentren. Letzten Endes könnte dies auf neue Verbindungen zwischen der komplex analytischen und der glatten Klassifikation von 4-Mannigfaltigkeiten führen.

1 Grundlagen

1.1 Kählergeometrie

Wir fassen in diesem Abschnitt einige grundlegende Eigenschaften und Notationen für Kählermannigfaltigkeiten zusammen. Ausgehend von einer fast komplexen Struktur auf einer Mannigfaltigkeit M , d. h. einem Automorphismus I des Tangentialbündels TM , der $I^2 = -\mathbb{1}$ erfüllt, geben wir folgende

Definition 1.1.1. Eine *Kählermannigfaltigkeit* (M, g, I) ist eine Mannigfaltigkeit M mit Riemannscher Metrik g und fast komplexer Struktur I , so dass gilt:

- (1) I ist orthogonal bezüglich g , d. h. $g(I\cdot, I\cdot) = g(\cdot, \cdot)$.
- (2) I ist kovariant konstant bezüglich des Levi-Civita-Zusammenhangs.

Wir nennen die (nichtentartete) 2-Form $\omega_I(\cdot, \cdot) := g(\cdot, I\cdot)$ *Kählerform*.

Notiz 1.1.2. [13] Wenn die Eigenschaft (1) erfüllt ist, dann ist (2) äquivalent dazu, dass die Kählerform ω_I geschlossen ist und der *Nijenhuis-Tensor* $N_I(X, Y) = [IX, IY] - [X, Y] - I[X, IY] - I[IX, Y]$ für alle Vektorfelder $X, Y \in \Gamma(TM)$ verschwindet. Also ist die Kählerform ω_I *symplektisch* und die fast komplexe Struktur I definiert nach einem Satz von *Newlander-Nirenberg* tatsächlich eine *komplexe Struktur* (siehe auch [20]).

Insbesondere ist jede Kählermannigfaltigkeit von gerader Dimension $2n$ und kanonisch durch die *Volumenform*

$$\text{dvol} = \frac{1}{n!} \omega^n$$

orientiert. Auf dem Tangentialbündel TM erhalten wir durch

$$h = g + i\omega$$

ein *hermitesches Produkt* (konjugiert-linear im zweiten Argument). Das $SO(2n)$ -Rahmenbündel reduziert zu einem $U(2)$ -Bündel über M .

Lemma 1.1.3. [20] Sei (M, g, I) eine Kählermannigfaltigkeit von komplexer Dimension n und $m \in M$. Dann gibt es in einer Umgebung von m holomorphe Koordinaten $(z_j = y_{2j-1} + iy_{2j})_{j=1, \dots, n}$, so dass $g\left(\frac{\partial}{\partial y_i}\Big|_m, \frac{\partial}{\partial y_j}\Big|_m\right) = \delta_{ij}$ und $\frac{\partial}{\partial y_k} g\left(\frac{\partial}{\partial y_i}, \frac{\partial}{\partial y_j}\right)\Big|_m = 0$.

Definition 1.1.4. Für eine Kählermannigfaltigkeit (M, g, I) nennen wir Koordinaten $(z_j)_{j=1, \dots, n}$ mit den Eigenschaften aus 1.1.3 *normale Koordinaten*.

Für diese Koordinaten setzen wir

$$\frac{\partial}{\partial z_j} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial y_{2j-1}} - i \frac{\partial}{\partial y_{2j}} \right) \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial y_{2j-1}} + i \frac{\partial}{\partial y_{2j}} \right) \quad (1.1)$$

sowie

$$dz_j = (dy_{2j-1} + iy_{2j}) \quad d\bar{z}_j = (dy_{2j-1} - iy_{2j}) \quad (1.2)$$

1.1.1 Hyperkählergeometrie

Definition 1.1.5. Eine *Hyperkählermannigfaltigkeit* (X, g, I, J, K) ist eine Riemannsche Mannigfaltigkeit (X, g) mit drei komplexen Strukturen I, J, K , die Folgendes erfüllen:

- (1) Es sind (X, g, I) , (X, g, J) und (X, g, K) jeweils Kählermannigfaltigkeiten.
- (2) $IJK = -1$

Um für gegebene fast komplexe Strukturen I, J, K auf einer Riemannschen Mannigfaltigkeit (X, g) zu prüfen, ob es sich um eine Hyperkählermannigfaltigkeit handelt, genügt schon:

Lemma 1.1.6. [1] Sei (X, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit mit diesbezüglich orthogonalen fast komplexen Strukturen (I, J, K) , welche $IJK = -1$ erfüllen. Wenn die Formen $\omega_I = g(\cdot, I\cdot)$, $\omega_J = g(\cdot, J\cdot)$ und $\omega_K = g(\cdot, K\cdot)$ geschlossen sind, so ist (X, g, I, J, K) Hyperkähler.

Notiz 1.1.7. Genauer besitzt eine Hyperkählermannigfaltigkeit eine ganze 2-Sphäre von Kählerstrukturen. Jede Kombination $I_\alpha = \alpha_I I + \alpha_J J + \alpha_K K$, wobei $\alpha = (\alpha_I, \alpha_J, \alpha_K) \in S^2$, definiert erneut eine Kählermannigfaltigkeit (M, g, I_α) .

Die Strukturgruppe einer Hyperkählermannigfaltigkeit von Dimension $4n$ reduziert zu $\mathrm{Sp}(n) = \mathrm{U}(n, \mathbb{H})$.

1.2 Differentialformen auf komplexen Mannigfaltigkeiten

Sei (M, g, I) eine fast komplexe Riemannsche Mannigfaltigkeit, so dass I orthogonal bezüglich g ist. Auf dem komplexifizierten Tangentialbündel $TM_{\mathbb{C}} := TM \otimes \mathbb{C}$ setzen wir I komplex linear fort und g konjugiert linear im zweiten Argument zu einem hermiteschen Produkt. Wegen $I^2 = -1$ erhalten wir die folgende orthogonale Zerlegung in die Eigenräume

$$TM_{\mathbb{C}} = TM^{1,0} \oplus TM^{0,1} \quad \text{wobei} \quad TM^{1,0} = \{ v \in TM_{\mathbb{C}} \mid Iv = +iv \} \\ TM^{0,1} = \{ v \in TM_{\mathbb{C}} \mid Iv = -iv \}$$

Die Projektionen $\pi^{1,0} = \frac{1}{2}(1 - iI): TM_{\mathbb{C}} \rightarrow TM^{1,0}$ und $\pi^{0,1} = \frac{1}{2}(1 + iI): TM_{\mathbb{C}} \rightarrow TM^{0,1}$ erfüllen $\pi^{1,0} \circ I = i\pi^{1,0}$ sowie $\pi^{0,1} \circ I = -i\pi^{0,1}$ und identifizieren daher die komplexen Vektorbündel

$$(TM, I) \cong TM^{1,0} \cong \overline{TM^{0,1}}.$$

Für die hermiteschen Produkte gilt $2(\pi^{1,0})^*g = h$.

Auf dem komplexifizierten Kotangententialraum $T^*M_{\mathbb{C}} = T^*M \otimes \mathbb{C}$ betrachten wir nun die von I induzierte komplexe Struktur \hat{I} die durch $\hat{I}\mu = \mu \circ I$ für $\mu \in T^*M_{\mathbb{C}}$ gegeben ist. Auch hier erhalten wir eine Zerlegung

$$T^*M_{\mathbb{C}} = T^*M^{1,0} \oplus T^*M^{0,1} \quad \text{wobei} \quad T^*M^{1,0} = \left\{ \mu \in T^*M_{\mathbb{C}} \mid \hat{I}\mu = +i\mu \right\} = (TM^{1,0})^*$$

$$T^*M^{0,1} = \left\{ \mu \in T^*M_{\mathbb{C}} \mid \hat{I}\mu = -i\mu \right\} = (TM^{0,1})^*$$

mit Projektionen $\pi^{1,0} = \frac{1}{2}(1 - i\hat{I}): T^*M_{\mathbb{C}} \rightarrow T^*M^{1,0}$ und $\pi^{0,1} = \frac{1}{2}(1 + i\hat{I}): T^*M_{\mathbb{C}} \rightarrow T^*M^{0,1}$. Wir identifizieren damit

$$(T^*M, \hat{I}) \cong T^*M^{1,0} \cong \overline{T^*M^{0,1}}.$$

Die Metrik g gibt uns weiter die folgenden Identifikationen

$$(T^*M, \hat{I}) \cong (TM, -I) \quad T^*M^{1,0} \cong TM^{0,1} \quad T^*M^{0,1} \cong TM^{1,0}$$

Wir setzen

$$\Lambda^{p,q}(T^*M) := \Lambda^p(T^*M^{1,0}) \otimes \Lambda^q(T^*M^{0,1})$$

sowie

$$\Omega^{p,q}(M, \mathbb{C}) := \Gamma(\Lambda^{p,q}(T^*M)).$$

Elemente von $\Omega^{p,q}(M, \mathbb{C})$ heißen *Differentialformen vom Typ (p, q)* . In normalen Koordinaten können wir in einer lokalen Karte U schreiben:

$$\Omega^{p,q} = \left\{ \sum b_{i_1, \dots, i_p}^{j_1, \dots, j_q} dz_{i_1} \wedge \dots \wedge dz_{i_p} \wedge d\bar{z}_{j_1} \wedge \dots \wedge d\bar{z}_{j_q} \mid b_{i_1, \dots, i_p}^{j_1, \dots, j_q} \in C^\infty(U, \mathbb{C}) \right\}$$

Die Kählerform ω einer Kählermannigfaltigkeit M ist eine $(1, 1)$ -Form. In normalen Koordinaten am Punkt $m \in M$ gilt

$$\omega|_m = \frac{i}{2} \sum_{j=1}^n dz_j \wedge d\bar{z}_j = \sum_{j=1}^n dy_{2j-1} \wedge dy_{2j}$$

Komplexwertige Differentialformen zerlegen sich in

$$\Omega^k(M, \mathbb{C}) = \bigoplus_{p+q=k} \Omega^{p,q}(M, \mathbb{C}). \quad (1.3)$$

Komponieren wir die äußere Ableitung d mit den folgenden Projektionen, so erhalten wir zwei neue Operatoren ∂ und $\bar{\partial}$, die auf (p, q) -Formen in dieser Weise gegeben sind:

$$\partial := \pi^{p+1, q} \circ d: \Omega^{p, q}(M, \mathbb{C}) \longrightarrow \Omega^{p+1, q}(M, \mathbb{C}) \quad (1.4)$$

$$\bar{\partial} := \pi^{p, q+1} \circ d: \Omega^{p, q}(M, \mathbb{C}) \longrightarrow \Omega^{p, q+1}(M, \mathbb{C}) \quad (1.5)$$

Es ist $\partial^2 = 0$, $\bar{\partial}^2 = 0$ sowie $d = \partial + \bar{\partial}$, wenn M eine komplexe Mannigfaltigkeit ist.

Bemerkung. [2] Für eine Kählermannigfaltigkeit M mit Kählerform ω können wir für jeden Punkt $m \in M$ eine Umgebung U und eine Funktion $\rho \in C^\infty(U, \mathbb{R})$ finden, so dass

$$\omega = \frac{i}{2} \partial \bar{\partial} \rho.$$

Die Funktion ρ heißt (*lokales*) *Kählerpotential*. Umgekehrt definiert jede Funktion $\rho \in C^\infty(M, \mathbb{R})$, die erfüllt, dass die Matrix $\frac{\partial^2 \rho}{\partial z_j \partial \bar{z}_k}$ an jedem Punkt m in lokalen Koordinaten (z_j) positiv definit ist, durch diese Gleichung eine Kählerform. Die Funktion ρ ist dann ein globales Kählerpotential.

1.3 Gruppenwirkungen

Sei $\Phi: G \times M \rightarrow M$ eine glatte Gruppenwirkung einer Liegruppe G mit Liealgebra \mathfrak{g} auf einer Mannigfaltigkeit M . Für $\xi \in \mathfrak{g}$ bezeichnen wir mit $K^\xi = K_M^\xi$ das von ξ erzeugte *Fundamentalektorfeld*

$$K^\xi \Big|_m = K_M^\xi \Big|_m := \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \Phi(\exp(t\xi), m) \quad (1.6)$$

Gelegentlich werden wir auch benutzen, dass

$$K^\xi \Big|_m = D_1(\Phi(\cdot, m)) \left(\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \exp(t\xi) \right) = D_1(\Phi(\cdot, m))(\xi). \quad (1.7)$$

Definition 1.3.1. Eine glatte Gruppenwirkung einer Liegruppe G auf einer symplektischen Mannigfaltigkeit (M, ω) heißt *symplektisch*, falls $g^*\omega = \omega$ für alle $g \in G$.

Definition 1.3.2. Eine symplektische Wirkung einer Liegruppe G heißt *Hamiltonsch*, wenn es zusätzlich eine Abbildung $\mu: M \rightarrow \mathfrak{g}^*$ in die duale Liealgebra \mathfrak{g}^* gibt, die für $\xi \in \mathfrak{g}$, $m \in M$ und $g \in G$

$$d\mu(\cdot)(\xi) = \iota_{K^\xi} \omega \quad \text{und} \quad \mu(gm) = \text{Ad}_g^*(\mu(m))$$

erfüllt. Die Abbildung μ heißt *Momentenabbildung* der Gruppenwirkung.

Lemma 1.3.3. [21] *Jede symplektische Wirkung von S^1 auf einer einfach zusammenhängenden Mannigfaltigkeit ist Hamiltonsch.*

1.3.1 Reduktion

Für Kählermannigfaltigkeiten gilt die folgende Version der Marsden-Weinstein-Reduktion.

Satz 1.3.4. (Marsden-Weinstein-Reduktion) [1] *Sei (M, ω) eine symplektische Mannigfaltigkeit mit einer Hamiltonschen Wirkung einer Liegruppe G und $\mu: M \rightarrow \mathfrak{g}^*$ die zugehörige Momentenabbildung. Sei $\alpha \in \mathfrak{g}^*$ ein regulärer Wert von μ und die Wirkung des Stabilisators $G_\alpha \subset G$ von α eigentlich und frei auf $\mu^{-1}(\alpha)$. Dann ist der Quotient $M_\alpha := \mu^{-1}(\alpha)/G_\alpha$ eine glatte symplektische Mannigfaltigkeit. Wenn (M, ω) außerdem eine Kählermannigfaltigkeit mit Kählerform ω ist, und die Wirkung von G die Kählerstruktur erhält, dann trägt der Quotient M_α auch eine Kählerstruktur.*

Zur Definition spezieller Hyperkählermannigfaltigkeiten benötigen wir die folgende Variante für den Hyperkähler-Fall:

Satz 1.3.5. [1] *Sei (M, g, I, J, K) eine Hyperkählermannigfaltigkeit und $\omega_I, \omega_J, \omega_K$ die entsprechenden Kählerformen. Auf M wirke eine Liegruppe G , die die Hyperkählerstruktur erhält und Hamiltonsch bezüglich jeder der drei Kählerformen ist. Die Momentenabbildungen notieren wir mit $\mu = (\mu_I, \mu_J, \mu_K): M \rightarrow \mathfrak{g}^* \otimes \mathbb{R}^3$. Sei $\lambda \in \mathfrak{g}^* \otimes \mathbb{R}^3$ ein regulärer Wert von μ , der unter der koadjungierten Wirkung von G auf \mathfrak{g}^* fix ist. Wenn nun $M_\lambda := \mu^{-1}(\lambda)/G$ eine Mannigfaltigkeit ist, dann induziert die Hyperkählerstruktur auf M eine Hyperkählerstruktur auf M_λ .*

1.4 Holomorphe Geradenbündel und Divisoren

Wir fassen kurz die grundlegenden Definitionen und Verbindungen zwischen Geradenbündeln und Divisoren zusammen, um später die holomorphe Beschreibung des klassischen Seiberg-Witten-Modulraums zu verstehen. Wir fixieren eine komplexe Mannigfaltigkeit M mit holomorpher Strukturgarbe \mathcal{O} . Für unsere Zwecke eignet sich folgende

Definition 1.4.1. Es sei E ein komplexes Vektorbündel über M . Eine *holomorphe Struktur* auf E ist ein Cauchy-Riemann-Operator $\bar{\partial}$ auf $\bigoplus_q \Omega^{p,q}(M, E)$, der $\bar{\partial} \circ \bar{\partial} = 0$ erfüllt.

Wir bezeichnen das Paar $(E, \bar{\partial})$ in diesem Fall als *holomorphes Vektorbündel*.

Zwei holomorphe Strukturen $\bar{\partial}_1$ und $\bar{\partial}_2$ heißen *isomorph*, wenn es einen Bündel-Automorphismus $T \in \text{Aut}(E)$ gibt, so dass $\bar{\partial}_2 = T\bar{\partial}_1T^{-1}$.

Wir bezeichnen die Menge dieser Isomorphieklassen mit $\text{Hol}(E)$.

Bemerkung. Ist E ein Geradenbündel über M , dann ist $\text{Aut}(E) = C^\infty(M, \mathbb{C}^*)$. Ist E ein hermitesches Geradenbündel über M , dann sind $C^\infty(M, S^1)$ die hermiteschen Automorphismen.

Bemerkung. Äquivalent ist eine holomorphe Struktur auf einem komplexen Vektorbündel $E \rightarrow M$ von Rang r auch durch eine Äquivalenzklasse von holomorphen lokalen Trivialisierungen (U_α, ϕ_α) gegeben, d. h. mit holomorphen Übergangsabbildungen $g_{\alpha\beta}: U_{\alpha\beta} \rightarrow \mathrm{GL}(r, \mathbb{C})$, so dass $\phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1} = g_{\alpha\beta}: \underline{\mathbb{C}}^r|_{U_{\alpha\beta}} \rightarrow \underline{\mathbb{C}}^r|_{U_{\alpha\beta}}$ (siehe [16]).

In diesem Sinne sind die Isomorphieklassen von holomorphen Geradenbündeln über M gerade $\check{H}^1(M, \mathcal{O}^*) =: \mathrm{Pic}(M)$ (vergleiche [8]).

Definition 1.4.2. Sei M eine komplexe Mannigfaltigkeit. Eine (nicht-leere), abgeschlossene Teilmenge $H \subset M$ heißt *Hyperfläche*, falls es um jeden Punkt $p \in H$ eine zusammenhängende offene Umgebung U gibt, so dass $H \cap U$ die Nullstellenmenge einer (nicht-konstanten) holomorphen Funktion auf U ist.

Wir nennen H *irreduzibel*, wenn H nicht die Vereinigung zweier anderer Hyperflächen ist.

Ein *Divisor* ist eine formale Summe $D = \sum d_i D_i$ mit $d_i \in \mathbb{Z}$ und $\{D_i\}$ eine lokal endliche Familie irreduzibler Hyperflächen auf M (d. h. jeder Punkt besitzt eine Umgebung, die nur endlich viele D_i 's schneidet).

Wir bezeichnen die Menge der Divisoren auf M mit $\mathrm{Div}(M)$.

Eine Divisor $D = \sum d_i D_i$ heißt *effektiv*, falls für alle i gilt, dass $d_i \geq 0$ und nicht alle d_i verschwinden.

Bemerkung. $(\mathrm{Div}(M), +)$ ist die freie abelsche Gruppe, die von den irreduziblen Hyperflächen in M erzeugt wird.

Bemerkung. Alternativ können wir einen Divisor auch durch eine offene Überdeckung (U_α) von M und nicht-triviale meromorphe Funktionen $f_\alpha: U_\alpha \dashrightarrow \mathbb{C}$ beschreiben, die erfüllen, dass $f_\alpha/f_\beta: U_{\alpha\beta} \rightarrow \mathbb{C}^*$ nirgends verschwindende holomorphe Funktionen sind. Die Funktionen f_α sind *lokal definierende Funktionen* für den Divisor $D = \sum_H \mathrm{ord}_H(f_\alpha) H$. Genauer ist (U_α, f_α) ein Vertreter aus $\check{H}^0(M, \mathcal{M}^*/\mathcal{O}^*)$ (wobei \mathcal{M}^* die Garbe der nicht verschwindenden meromorphen Funktionen bezeichnet). Es ist $(\mathrm{Div}(M), +) = (\check{H}^0(M, \mathcal{M}^*/\mathcal{O}^*), \cdot)$ (vergleiche [8]).

Ein Divisor $D = (U_\alpha, f_\alpha)$ definiert ein holomorphes Geradenbündel $\mathcal{O}_M(D)$, indem wir die Übergangsfunktionen durch $g_{\alpha\beta} = f_\alpha/f_\beta: U_{\alpha\beta} \rightarrow \mathbb{C}^*$ definieren. Äquivalente lokal definierende Funktionen führen hier zu isomorphen holomorphen Geradenbündeln. Tatsächlich definiert das einen Homomorphismus abelscher Gruppen

$$(\mathrm{Div}(M), +) \longrightarrow (\mathrm{Pic}(M), \otimes),$$

welcher mit dem Verbindungshomomorphismus $\check{H}^0(M, \mathcal{M}^*/\mathcal{O}^*) \rightarrow \check{H}^1(M, \mathcal{O}^*)$ übereinstimmt.

Definition 1.4.3. Zwei Divisoren D und D' heißen *linear äquivalent*, falls $\mathcal{O}_M(D) = \mathcal{O}_M(D')$.

In diesem holomorphen Geradenbündel $\mathcal{O}_M(D)$ können wir (f_α) als einen meromorphen Schnitt m auffassen. Äquivalente lokal definierende Funktionen führen hier auf konstante Vielfache km ($k \in \mathbb{C}^*$). Umgekehrt beschreibt jedes Paar (\mathcal{K}, m) aus einem meromorphen Schnitt m in einem holomorphen Geradenbündel \mathcal{K} einen Divisor. Isomorphe holomorphe Geradenbündel und konstante Vielfache km mit $k \in \mathbb{C}^*$ liefern denselben Divisor zurück. In diesem Bild ist ein *effektiver* Divisor gerade ein *holomorpher* Schnitt in einem holomorphen Geradenbündel.

Definition 1.4.4. Es sei D ein Divisor auf M . Der projektive Raum

$$|D| := \mathbb{P}(\check{H}^0(M, \mathcal{O}_M(D)))$$

der holomorphen Schnitte in $\mathcal{O}_M(D)$ ist ein *vollständiges lineares System*. Einen linearen projektiven Unterraum nennen wir *lineares System*.

Bemerkung. Ein vollständiges lineares System $|D|$ beschreibt genau die effektiven Divisoren, die linear äquivalent zu D sind.

2 Der Seiberg-Witten-Modulraum im Kähler-Fall

In diesem Kapitel formulieren wir die Seiberg-Witten-Gleichungen für eine Kählermannigfaltigkeit M mit $\text{Spin}^{\mathbb{C}}$ -Struktur. Dazu benötigen wir einige vorbereitende Betrachtungen zu $\text{Spin}^{\mathbb{C}}$ -Strukturen und Dirac-Operatoren. Anschließend geben wir eine holomorphe Beschreibung des Seiberg-Witten-Modulraumes. Für einen expliziten Einstieg verzichten wir hier auf größtmögliche Allgemeinheit und verweisen auf [16] und [14] für eine ausführliche Behandlung. Wenn nicht anders angegeben, bezeichnet (M, g_M, I_M) eine vierdimensionale, zusammenhängende Kählermannigfaltigkeit.

2.1 $\text{Spin}^{\mathbb{C}}$ -Strukturen und Spinorbündel

Die Lie-Gruppe

$$\text{Spin}^{\mathbb{C}}(4) := S^1 \times_{\mathbb{Z}_2} (\text{Sp}_+(1) \times \text{Sp}_-(1))$$

wirkt mittels der \mathbb{R} -Vektorraum-Identifikation von \mathbb{R}^4 mit den Quaternionen

$$\mathbb{H} = \{ x_0 + x_1i + x_2j + x_3k \mid x_i \in \mathbb{R} \} \cong \{ x_0e_0 + x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3 \mid x_i \in \mathbb{R} \} = \mathbb{R}^4$$

auf \mathbb{R}^4 durch

$$[\lambda, (q_+, q_-)] \cdot x = q_- x \overline{q_+}$$

Die Wirkung definiert einen Gruppenhomomorphismus $\rho_c: \text{Spin}^{\mathbb{C}}(4) \rightarrow \text{SO}(4)$. Wir erhalten folgende exakte Sequenz:

$$1 \longrightarrow S^1 = \{ [\lambda, (1, 1)] \mid \lambda \in S^1 \} \longleftarrow \text{Spin}^{\mathbb{C}}(4) \xrightarrow{\rho_c} \text{SO}(4) \longrightarrow 1$$

Das $\text{SO}(4)$ -Rahmenbündel einer vierdimensionalen orientierten Riemannschen Mannigfaltigkeit M bezeichnen wir mit $P_{\text{SO}(4)}$. Eine $\text{Spin}^{\mathbb{C}}$ -Struktur ist dann ein Lift zu einem $\text{Spin}^{\mathbb{C}}(4)$ -Hauptfaserbündel.

Definition 2.1.1. Eine $\text{Spin}^{\mathbb{C}}(4)$ -Struktur auf einer vierdimensionalen orientierten Riemannschen Mannigfaltigkeit M ist ein $\text{Spin}^{\mathbb{C}}(4)$ -Hauptfaserbündel $P \rightarrow M$, so dass das $\text{SO}(4)$ -Hauptfaserbündel $P/S^1 = P \times_{\rho_c} \text{SO}(4)$ isomorph zum Rahmenbündel $P_{\text{SO}(4)}$ ist.

Zu einer $\text{Spin}^{\mathbb{C}}$ -Struktur definieren wir mit der Darstellung

$$\rho_{\det}: \text{Spin}^{\mathbb{C}}(4) \longrightarrow \text{U}(1) \quad \rho_{\det}([\lambda, (q_+, q_-)]) = \lambda^2$$

das *Determinantenbündel*

$$\mathcal{L}_{\det} := P \times_{\rho_{\det}} \mathbb{C}$$

bzw. das entsprechende Rahmenbündel

$$P_{\det} := P \times_{\rho_{\det}} \text{U}(1).$$

Die folgenden Sequenzen sind exakt:

$$1 \longrightarrow \text{Spin}(4) = \text{Sp}_+(1) \times \text{Sp}_-(1) \hookrightarrow \text{Spin}^{\mathbb{C}}(4) \xrightarrow{\rho_{\det}} \text{U}(1) \longrightarrow 1$$

$$1 \longrightarrow \mathbb{Z}_2 = \{ (1, 1), (-1, -1) \} \hookrightarrow \text{Spin}^{\mathbb{C}}(4) \xrightarrow{\rho_c \times \rho_{\det}} \text{SO}(4) \times \text{U}(1) \longrightarrow 1$$

Somit können wir P_{\det} auch als $P/\text{Spin}(4) = P \times_{\rho_{\det}} \text{U}(1) = P_{\det}$ auffassen. Die zweite Sequenz induziert eine zweifache Überlagerung $\xi: P \rightarrow P_{\text{SO}(4)} \times_M P_{\det}$.

$$\begin{array}{ccc} P = P_{\text{Spin}^{\mathbb{C}}(4)} & \xrightarrow{\xi} & P_{\text{SO}(4)} \times_M P_{\det} = P \times_{\rho_c \times \rho_{\det}} (\text{SO}(4) \times \text{U}(1)) \\ & \searrow & \swarrow \\ & M & \end{array}$$

Definition 2.1.2. Sei $P \rightarrow M$ eine $\text{Spin}^{\mathbb{C}}(4)$ -Struktur auf einer vierdimensionalen Riemannschen Mannigfaltigkeit M . Das *positive* und das *negative Spinorbündel* sind die zu den Darstellungen

$$\rho_+: \text{Spin}^{\mathbb{C}}(4) \longrightarrow \text{U}(2) \quad \rho_+([\lambda, (q_+, q_-)])(h) = q_+ h \lambda$$

$$\rho_-: \text{Spin}^{\mathbb{C}}(4) \longrightarrow \text{U}(2) \quad \rho_-([\lambda, (q_+, q_-)])(h) = q_- h \lambda$$

assoziierten Bündel

$$W^+ = P \times_{\rho_+} \mathbb{H} \quad W^- = P \times_{\rho_-} \mathbb{H}.$$

Dass wir mit den Homomorphismen $\rho_{\pm}: \text{Spin}^{\mathbb{C}}(4) \rightarrow \text{Aut}(\mathbb{H})$ in $S^1 \times_{\mathbb{Z}_2} \text{SU}(2) \cong \text{U}(2)$ landen, ist über die Identifizierung

$$\mathbb{H} = \{ z_1 + jz_2 \mid z_i \in \mathbb{C} \} \cong \mathbb{C}^2 \tag{2.1}$$

als \mathbb{C} -Vektorräume zu verstehen. Diese liefert auch den Gruppenisomorphismus

$$\text{Sp}(1) = \{ a + jb \mid a, b \in \mathbb{C} \} \cong \left\{ \begin{pmatrix} a & -\bar{b} \\ b & \bar{a} \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{C} \right\} = \text{SU}(2).$$

In diesem Sinne sind ρ_+ und ρ_- Darstellungen $\text{Spin}^{\mathbb{C}}(4) \rightarrow S^1 \times_{\mathbb{Z}_2} \text{SU}(2) = \text{U}(2)$ und

$$W^+ = P \times_{\rho_+} \mathbb{C}^2 \quad W^- = P \times_{\rho_-} \mathbb{C}^2.$$

Spinorbündel im Kähler-Fall Falls M eine Kählermannigfaltigkeit ist, reduziert das Rahmenbündel $P_{SO(4)}$ zu einem $U(2)$ -Hauptfaserbündel $P_{U(2)}$, so dass $P_{SO(4)} = P_{U(2)} \times_s SO(4)$ für die Standardeinbettung $s: U(2) \hookrightarrow SO(4)$. Diese faktorisiert mit

$$j: U(2) \cong S^1 \times_{\mathbb{Z}_2} \mathrm{Sp}(1) \longrightarrow \mathrm{Spin}^{\mathbb{C}}(4) \quad [\lambda, q] \longmapsto [\lambda, (\bar{\lambda}, q)]$$

über $\mathrm{Spin}^{\mathbb{C}}(4)$ durch $s = \rho_c \circ j$.

$$\begin{array}{ccc} & & \mathrm{Spin}^{\mathbb{C}}(4) \\ & \nearrow j & \downarrow \rho_c \\ U(2) & \xrightarrow{s} & SO(4) \end{array}$$

Daher gilt

$$(P_{U(2)} \times_j \mathrm{Spin}^{\mathbb{C}}(4)) \times_{\rho_c} SO(4) = P_{U(2)} \times_s SO(4) = P_{SO(4)}$$

und $P_{U(2)} \times_j \mathrm{Spin}^{\mathbb{C}}(4)$ definiert eine Spin^C-Struktur.

Definition 2.1.3. Für eine vierdimensionale Kählermannigfaltigkeit M sei $P_{U(2)}$ das auf die Strukturgruppe $U(2)$ reduzierte Rahmenbündel. Das $\mathrm{Spin}^{\mathbb{C}}(4)$ -Hauptfaserbündel

$$P_{can} := P_{U(2)} \times_j \mathrm{Spin}^{\mathbb{C}}(4)$$

ist die *kanonische Spin^C-Struktur* der Kählermannigfaltigkeit M .

Das Determinantenbündel ist in diesem Fall das *antikanonische Geradenbündel*:

$$\mathcal{L}_{det}^{can} = P_{can} \times_{\rho_{det}} \mathbb{C} = P_{U(2)} \times_{\rho_{det} \circ j} \mathbb{C} = P_{U(2)} \times_{det} \mathbb{C} = \Lambda^{0,2}(T^*M) = K_M^{-1}$$

Die Spinorbündel der kanonischen Spin^C-Struktur sind

$$\begin{aligned} W_{can}^+ &= P_{can} \times_{\rho_+} \mathbb{C}^2 = P_{U(2)} \times_{\rho_+ \circ j} \mathbb{C}^2 = P_{U(2)} \times_{1 \oplus det} \mathbb{C}^2 \\ &= \Lambda^{0,0}(T^*M) \oplus \Lambda^{0,2}(T^*M) = \underline{\mathbb{C}}_M \oplus K_M^{-1} \\ W_{can}^- &= P_{can} \times_{\rho_-} \mathbb{C}^2 = P_{U(2)} \times_{\rho_- \circ j} \mathbb{C}^2 = P_{U(2)} \times_{\rho_{stand}} \mathbb{C}^2 = \Lambda^{0,1}(T^*M). \end{aligned}$$

Jede andere Spin^C-Struktur erhalten wir als $P_L := P_{can} \times_{S^1} L$ für ein S^1 -Hauptfaserbündel L . Das zu L assoziierte hermitesche Geradenbündel sei $\mathcal{L} := L \times_{S^1} \mathbb{C}$. Wegen $\rho_{det}([\lambda, (1, 1)]) = \lambda^2$ ist das Determinantenbündel dann

$$\mathcal{L}_{det}^L = P_L \times_{\rho_{det}} \mathbb{C} = (P_{can} \times_{S^1} L) \times_{\rho_{det}} \mathbb{C} = K_M^{-1} \otimes \mathcal{L}^2 \quad (2.2)$$

Das entsprechende Hauptfaserbündel $P_L \times_{\rho_{det}} U(1)$ bezeichnen wir mit P_{det}^L .

Für die Spinorbündel erhalten wir

$$\begin{aligned} W_L^+ &= P_L \times_{\rho_+} \mathbb{C}^2 = W_{can}^+ \times_{S^1} L = W_{can}^+ \otimes \mathcal{L} \\ &= \Lambda^{0,0}(T^*M, \mathcal{L}) \oplus \Lambda^{0,2}(T^*M, \mathcal{L}) = \mathcal{L} \oplus K_M^{-1} \otimes \mathcal{L} \\ W_L^- &= P_L \times_{\rho_-} \mathbb{C}^2 = W_{can}^- \times_{S^1} L = W_{can}^- \otimes \mathcal{L} = \Lambda^{0,1}(T^*M, \mathcal{L}). \end{aligned}$$

Mit dem $S^1 \times S^1$ -Hauptfaserbündel $Q_L := L \times_M \left((P_{U(2)} \times_{\det} S^1) \times_{S^1} L \right)$ können wir das positive Spinorbündel W_L^+ auch so schreiben:

$$W_L^+ = \mathcal{L} \oplus K_M^{-1} \otimes \mathcal{L} = Q_L \times_{S^1 \times S^1} \mathbb{C}^2 = Q_L \times_{S^1 \times S^1} \mathbb{H} \quad (2.3)$$

Dabei ist die $S^1 \times S^1$ -Wirkung durch $(e^{i\gamma}, e^{i\delta}) \cdot (z_1, z_2) = (e^{i\gamma} z_1, e^{i\delta} z_2)$ bzw. $(e^{i\gamma}, e^{i\delta}) \cdot (z_1 + jz_2) = e^{i\gamma} z_1 + j e^{i\delta} z_2$ gegeben. Eine detaillierte Übersicht, mit welchen Darstellungen für Spinor- und Determinantenbündel wir arbeiten werden, findet sich im Anhang A.1.

2.2 Zusammenhänge auf den Spinorbündeln

Für eine vierdimensionale Kählermannigfaltigkeit M reduziert der Levi-Civita-Zusammenhang auf $P_{SO(4)}$ auf den Chern-Zusammenhang (siehe dazu auch 2.6.2) auf $P_{U(2)}$. Wir bezeichnen beide Zusammenhänge mit ϕ . Sämtliche dadurch induzierten Zusammenhänge auf assoziierten Vektorbündeln bezeichnen wir mit ∇^ϕ .

Insbesondere induziert ϕ eine kovariante Ableitung ∇^ϕ auf dem kanonischen Spinorbündel $W_{can} := W_{can}^+ \oplus W_{can}^- = \bigoplus_{q=0,1,2} \Lambda^{0,q}(T^*M)$. Für jeden S^1 -Zusammenhang B auf L erhalten wir auf diese Weise eine kovariante Ableitung auf dem Spinorbündel $W_{can} \otimes \mathcal{L} = W_L$:

$$\nabla^{\phi \otimes B} := \nabla^\phi \otimes \mathbb{1}_{\mathcal{L}} + \mathbb{1}_{W_{can}} \otimes \nabla^B$$

Umgekehrt ist jeder Zusammenhang auf dem $\text{Spin}^{\mathbb{C}}(4)$ -Hauptfaserbündel P_L , der unter der Überlagerungsabbildung $\xi: P_L \rightarrow P_{SO(4)} \times_M P_{\det}^L$ auf den Levi-Civita-Zusammenhang ϕ in $P_{SO(4)}$ abbildet, eindeutig durch sein Bild auf P_{\det}^L bestimmt. Die $U(1)$ -Zusammenhänge A auf P_{\det}^L wiederum stehen in (1:1)-Korrespondenz mit Zusammenhängen B auf L (vergleiche hierzu (2.2)), wir schreiben

$$A = \phi \otimes B^2. \quad (2.4)$$

Die Wahl eines Zusammenhangs B auf L (oder äquivalent A auf P_{\det}^L) legt also eindeutig einen hermiteschen Zusammenhang auf den Spinorbündeln fest.

Notiz 2.2.1. Auf dem $S^1 \times S^1$ -Bündel $Q_L = L \times_M (P_{U(2)} \times_{\det} L)$ notieren wir den entsprechenden Zusammenhang mit $B \oplus \phi \otimes B$.

Seien weiter $F_A, F_\phi, F_B \in \Omega^2(M, i\mathbb{R})$ die Krümmungen der entsprechenden Zusammenhänge auf $\mathcal{L}_{\det}^L, K_M^{-1}, \mathcal{L}$. Das folgende Lemma zeigt dann

$$F_A = F_\phi + 2F_B. \quad (2.5)$$

Lemma 2.2.2. *Seien \mathcal{L}_1 und \mathcal{L}_2 zwei $U(1)$ -Bündel mit entsprechenden Zusammenhängen ∇^{A_1} und ∇^{A_2} . Dann gilt $F_{A_1 \otimes A_2} = F_{A_1} + F_{A_2}$.*

Beweis. Für $X, Y \in \Gamma(TM)$ gilt

$$\begin{aligned}
 F_{A_1 \otimes A_2}(X, Y) \cdot \mathbb{1}_{\mathcal{L}_1 \otimes \mathcal{L}_2} &= \left[\nabla_X^{A_1 \otimes A_2}, \nabla_Y^{A_1 \otimes A_2} \right] - \nabla_{[X, Y]}^{A_1 \otimes A_2} \\
 &= \left[\nabla_X^{A_1} \otimes \mathbb{1}_{\mathcal{L}_2}, \nabla_Y^{A_1} \otimes \mathbb{1}_{\mathcal{L}_2} \right] - \nabla_{[X, Y]}^{A_1} \otimes \mathbb{1}_{\mathcal{L}_2} \\
 &\quad + \left[\mathbb{1}_{\mathcal{L}_1} \otimes \nabla_X^{A_2}, \mathbb{1}_{\mathcal{L}_1} \otimes \nabla_Y^{A_2} \right] - \mathbb{1}_{\mathcal{L}_1} \otimes \nabla_{[X, Y]}^{A_2} \\
 &\quad + \left[\mathbb{1}_{\mathcal{L}_1} \otimes \nabla_X^{A_2}, \nabla_Y^{A_1} \otimes \mathbb{1}_{\mathcal{L}_2} \right] + \left[\nabla_X^{A_1} \otimes \mathbb{1}_{\mathcal{L}_2}, \mathbb{1}_{\mathcal{L}_1} \otimes \nabla_Y^{A_2} \right] \\
 &= F_{A_1}(X, Y) \otimes \mathbb{1}_{\mathcal{L}_2} + \mathbb{1}_{\mathcal{L}_1} \otimes F_{A_2}(X, Y) \\
 &= (F_{A_1}(X, Y) + F_{A_2}(X, Y)) \cdot \mathbb{1}_{\mathcal{L}_1 \otimes \mathcal{L}_2}. \quad \square
 \end{aligned}$$

Notiz 2.2.3. [20] Die Krümmung F_ϕ von K_M^{-1} ist eine imaginärwertige $(1, 1)$ -Form, da ϕ der Chern-Zusammenhang ist.

2.2.1 Die Wirkung der Eichgruppe auf den Zusammenhängen

Wir definieren bereits an dieser Stelle die Eichgruppe, die auch auf den Lösungen der Seiberg-Witten-Gleichungen operiert (vergleiche Abschnitt 2.5).

Definition 2.2.4. Für eine Mannigfaltigkeit M definieren wir die *Eichgruppe*

$$\mathcal{G} := C^\infty(M, S^1).$$

Die Zusammenhänge auf einem $U(1)$ -Hauptfaserbündel über einer Mannigfaltigkeit M bilden einen affinen Raum über $\Omega^1(M, i\mathbb{R})$. Die Eichgruppe \mathcal{G} wirkt auf den Zusammenhängen auf L durch

$$B^\gamma := B - \gamma^* \eta \tag{2.6}$$

wobei η die *Maurer-Cartan-Form* auf S^1 ist. Auf den Zusammenhängen A auf P_{\det}^L entspricht das über die Korrespondenz (2.4) der Wirkung

$$A^\gamma := A - 2\gamma^* \eta. \tag{2.7}$$

Schließlich induziert das auch eine Wirkung der Eichgruppe auf den Zusammenhängen $\nabla^{\phi \otimes B}$ auf dem Spinorbündel $W_{can} \otimes \mathcal{L} = W_L$. Hierfür gilt nach dem folgenden Lemma

$$\nabla^{\phi \otimes B^\gamma} = \gamma \nabla^{\phi \otimes B} \gamma^{-1} \tag{2.8}$$

Lemma 2.2.5. *Sei C ein Zusammenhang in einem S^1 -Hauptfaserbündel K und ∇^C der zugehörige Zusammenhang auf $\mathcal{K} := K \times_{S^1} \mathbb{C}$. Sei weiter E ein komplexes Vektorbündel über derselben Mannigfaltigkeit und ∇^E ein Zusammenhang auf E . Bezeichnen wir mit C^γ den Zusammenhang $C - \gamma^*\eta$, wobei η die Maurer-Cartan-Form auf S^1 und $\gamma \in \mathcal{G}$ ist, so gilt*

$$\nabla^E \otimes \mathbf{1}_{\mathcal{K}} + \mathbf{1}_E \otimes \nabla^{C^\gamma} = \gamma \left(\nabla^E \otimes \mathbf{1}_{\mathcal{K}} + \mathbf{1}_E \otimes \nabla^C \right) \gamma^{-1}.$$

Beweis. Die folgende Rechnung zeigt zunächst $\nabla^{C^\gamma} \gamma = \gamma \nabla^C$. Wir benutzen, dass $\gamma^*\eta = \gamma^{-1}d\gamma$. Für eine antiäquivalente Funktion $f \in C^\infty(K, \mathbb{C})^{S^1}$, $p \in K$ und $t \in T_p K$ erhalten wir

$$\begin{aligned} & (d + C^\gamma)(\gamma f)|_p(t) \\ &= d(\gamma f)|_p(t) + (C - \gamma^*\eta)|_p(t)(\gamma f(p)) \\ &= d\gamma|_p(t)f(p) + \gamma(p)df|_p(t) + C|_p(t)(\gamma f(p)) - \gamma^{-1}d\gamma|_p(t)(\gamma f(p)) \\ &= \gamma(p)df|_p(t) + \gamma(p)C|_p(t)(f(p)) = \gamma(p)(d + C)(f)|_p(t) \end{aligned}$$

Sei nun $\tau \otimes k \in \Gamma(E \otimes \mathcal{K})$. Das Lemma folgt dann aus

$$\begin{aligned} & \left(\nabla^E \otimes \mathbf{1}_{\mathcal{K}} + \mathbf{1}_E \otimes \nabla^{C^\gamma} \right) (\gamma(\tau \otimes k)) \\ &= \nabla^E \tau \otimes (\gamma k) + \tau \otimes \nabla^{C^\gamma}(\gamma k) \\ &= \gamma \left(\nabla^E \tau \otimes k \right) + \tau \otimes \gamma \nabla^C k \\ &= \gamma \left(\nabla^E \otimes \mathbf{1}_{\mathcal{K}} + \mathbf{1}_E \otimes \nabla^C \right) (\tau \otimes k). \quad \square \end{aligned}$$

Bemerkung. Eine ganz ähnliche Rechnung wie im Beweis von Lemma 2.2.5 zeigt, dass für einen Zusammenhang A auf P_{\det}^L gilt

$$\nabla^{A^\gamma} = \gamma^2 \nabla^A \gamma^{-2}. \quad (2.9)$$

Da η die Maurer-Cartan-Form ist, schließen wir

$$F_{B^\gamma} = F_{B - \gamma^*\eta} = F_B.$$

Auch die Krümmung im Determinantenbündel bleibt unter der Wirkung der Eichgruppe erhalten:

$$F_{A^\gamma} = F_\phi + 2F_{B^\gamma} = F_A \quad (2.10)$$

2.3 Dirac-Operatoren

Zur Definition eines Dirac-Operators fehlt uns noch die Clifford-Multiplikation von k -Formen auf M mit Spinoren. Wir erinnern uns, dass für eine $\text{Spin}^{\mathbb{C}}(4)$ -Mannigfaltigkeit $TM = P_{\text{Spin}^{\mathbb{C}}(4)} \times_{\rho_c} \mathbb{R}^4$ sowie $W^{\pm} = P_{\text{Spin}^{\mathbb{C}}(4)} \times_{\rho_{\pm}} \mathbb{H}$. Der folgende Homomorphismus von $\text{Spin}^{\mathbb{C}}(4)$ -Darstellungen

$$\begin{aligned} (\mathbb{R}^4 \cong \mathbb{H}, \rho_c) \otimes (\mathbb{H} \oplus \mathbb{H}, \rho_+ \oplus \rho_-) &\xrightarrow{c} (\mathbb{H} \oplus \mathbb{H}, \rho_+ \oplus \rho_-) \\ x \otimes (h_+, h_-) &\longmapsto (-\bar{x}h_-, xh_+) \end{aligned} \quad (2.11)$$

definiert somit eine Multiplikation

$$TM \otimes (W^+ \oplus W^-) \longrightarrow W^+ \oplus W^-.$$

Über die Identifizierung $TM \cong T^*M$ mit der Metrik erhalten wir auch eine Multiplikation

$$T^*M \otimes (W^+ \oplus W^-) \longrightarrow W^+ \oplus W^-.$$

Definition 2.3.1. Für eine $\text{Spin}^{\mathbb{C}}(4)$ -Mannigfaltigkeit M ist die *Clifford-Multiplikation* einer 1-Form mit einem Spinor die durch (2.11) induzierte Multiplikation

$$\Gamma(T^*M \otimes (W^+ \oplus W^-)) \longrightarrow \Gamma(W^+ \oplus W^-).$$

Ist $\mu = \mu^1 \wedge \cdots \wedge \mu^k$ eine orthogonale Zerlegung einer reellen k -Form μ , so definieren wir die Clifford-Multiplikation eines Spinors mit μ durch die Hintereinanderausführung $c(\mu) = c(\mu^1) \cdots c(\mu^k)$. Für (komplexwertige) Formen setzen wir die Clifford-Multiplikation (komplex) linear fort.

Bemerkung. In der Tat ist die obige Definition unabhängig von der Wahl der orthogonalen Zerlegung der k -Form. Der Homomorphismus (2.11) erfüllt, dass $c(e_i)c(e_j) + c(e_j)c(e_i) = -2\delta_{ij}$ und $c(e_i)$ ist unitär bezüglich des Standardproduktes auf $\mathbb{H} \cong \mathbb{C}^2$ (vergleiche 2.1).

Notiz 2.3.2. Durch die Clifford-Multiplikation ergeben sich die folgenden Identifikationen:

$$\begin{aligned} c: \quad \Omega^{\text{gerade}}(M, \mathbb{C}) &\xrightarrow{\sim} \Gamma(\text{End}_{\mathbb{C}}(W_L^+) \oplus \text{End}_{\mathbb{C}}(W_L^-)) \\ c: \quad \Omega^{\text{ungerade}}(M, \mathbb{C}) &\xrightarrow{\sim} \Gamma(\text{Hom}_{\mathbb{C}}(W_L^+, W_L^-) \oplus \text{Hom}_{\mathbb{C}}(W_L^-, W_L^+)) \end{aligned}$$

Notiz 2.3.3. (Clifford-Multiplikation auf Kählermannigfaltigkeiten / lokale Koordinaten)

Für eine Kählermannigfaltigkeit genügt es, die Abbildung (2.11) mit $j: U(2) \rightarrow \text{Spin}^{\mathbb{C}}(4)$ (bzw. $\rho_{S^1} \cdot j: U(2) \times S^1 \rightarrow \text{Spin}^{\mathbb{C}}(4)$) als Homomorphismus von $U(2)$ -Darstellungen (bzw. $U(2) \times S^1$ -Darstellungen) aufzufassen. Wir erhalten die Clifford-Multiplikation einer 1-Form mit einem kanonischen (allgemeinen) Spinor

$$\begin{aligned} \Gamma(T^*M \otimes (W_{can}^+ \oplus W_{can}^-)) &\longrightarrow \Gamma(W_{can}^+ \oplus W_{can}^-) \\ \Gamma(T^*M \otimes (W_L^+ \oplus W_L^-)) &\longrightarrow \Gamma(W_L^+ \oplus W_L^-) \end{aligned} \quad (2.12)$$

(vergleiche hierzu auch den Anhang A.1). Wir wollen nun nachvollziehen, wie diese Definition konsistent mit der folgenden Vorschrift für eine 1-Form $\mu \in \Omega^1(M, \mathbb{R})$ ist:

$$c(\mu)s = \sqrt{2} \left(\pi^{0,1}(\mu) \wedge s - \pi^{0,1}(\mu) \lrcorner s \right). \quad (2.13)$$

Hierbei bezeichnet $\pi^{0,1}$ die Projektion auf $\Lambda^{0,1}(T^*M)$ und \lrcorner die Kontraktion bezüglich der Metrik g_M . Dazu seien $z_1 = y_1 + iy_2 = x_0 + ix_1, z_2 = y_3 + iy_4 = x_2 - ix_3$ normale Koordinaten an einem Punkt m . Wir setzen $\ell^i := dy_i$ ($i = 1, \dots, 4$) sowie $e^i := dx_i$ ($i = 0, \dots, 3$). In den Basen $\left(1, \frac{1}{2}(d\bar{z}_2 \wedge dz_1)\right)$ für $W_{can}^+ = \mathbb{C}_M \oplus \Lambda^{0,2}(T^*M)$ und $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}d\bar{z}_1, \frac{1}{\sqrt{2}}d\bar{z}_2\right)$ für $W_{can}^- = \Lambda^{0,1}(T^*M)$ ist $c(e^i)$ wie folgt gegeben:

$$\begin{array}{c} c(e^1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad c(e^2) = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \quad c(e^3) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad c(e^4) = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix} \\ \leftarrow W_{can}^+ \quad \longleftarrow \quad \longrightarrow \quad \rightarrow W_{can}^- \\ c(e^1) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad c(e^2) = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \quad c(e^3) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad c(e^4) = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Dies ist konsistent mit (2.11) und (2.1).

Insbesondere gilt in der Basis $\left(1, \frac{1}{2}(d\bar{z}_1 \wedge d\bar{z}_2)\right)$ auf W_{can}^+ :

$$c\left(\frac{1}{2}(dz_2 \wedge dz_1)\right) = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.14)$$

$$c(\omega_M) = c(\ell^1 \wedge \ell^2 + \ell^3 \wedge \ell^4) = c(e^0 \wedge e^1 - e^2 \wedge e^3) = \begin{pmatrix} -2i & 0 \\ 0 & 2i \end{pmatrix} \quad (2.15)$$

$$c\left(\frac{1}{2}(d\bar{z}_2 \wedge d\bar{z}_1)\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.16)$$

Definition 2.3.4. Sei (M, g_M, I_M) eine Kählermannigfaltigkeit mit $\text{Spin}^{\mathbb{C}}(4)$ -Struktur P_L und A ein $U(1)$ -Zusammenhang im Determinantenbündel P_{\det}^L . Sei weiter ∇^ϕ der Zusammenhang auf dem kanonischen Spinorbündel W_{can} , der durch den Levi-Civita-Zusammenhang gegeben ist. A legt durch $A = \phi \otimes B^2$ eindeutig einen Zusammenhang B auf L fest. Wir definieren einen *Dirac-Operator* mittels

$$\mathcal{D}^A: \Gamma(W_L) \xrightarrow{\nabla^{\phi \otimes B}} \Gamma(T^*M \otimes W_L) \xrightarrow{c} \Gamma(W_L). \quad (2.17)$$

Für den Fall, dass \mathcal{L} das triviale Geradenbündel $\underline{\mathbb{C}}_M$ und ∇^B der triviale Zusammenhang d ist, schreiben wir auch

$$\mathcal{D}: \Gamma(W_{can}) \xrightarrow{\nabla^\phi} \Gamma(T^*M \otimes W_{can}) \xrightarrow{c} \Gamma(W_{can}). \quad (2.18)$$

Schränken wir den Operator auf W_L^+ ein, so bezeichnen wir ihn mit

$$\mathcal{D}^A: \Gamma(W_L^+) \xrightarrow{\nabla^{\phi \otimes B}} \Gamma(T^*M \otimes W_L^+) \xrightarrow{c} \Gamma(W_L^-). \quad (2.19)$$

Notiz 2.3.5. Für einen orientierten orthonormalen Rahmen $\{\ell_1, \dots, \ell_4\}$ für $T_m M$ erhalten wir

$$\mathcal{D}^A(s)|_m = \sum_{i=1}^4 c(\ell^i) \nabla_{\ell_i}^{\phi \otimes B}(s)|_m$$

Aus Gleichung (2.8) folgt für die Wirkung der Eichgruppe \mathcal{G} auf dem entsprechenden Dirac-Operator:

$$\mathcal{D}^{A^\gamma} = \gamma \mathcal{D}^A \gamma^{-1} \quad (2.20)$$

2.3.1 Komplex-geometrische Beschreibung der Dirac-Operatoren

Für eine Kählermannigfaltigkeit M haben wir für einen Dirac-Operator auch eine komplex-geometrische Beschreibung. Wir bezeichnen mit $*$ den durch die Metrik g_M gegebenen *Hodge-Stern-Operator* sowie dessen konjugiert-lineare Fortsetzung auf $\Omega^\bullet(M, \mathbb{C})$ und definieren für eine Kählermannigfaltigkeit

$$\bar{\partial}^* := - * \bar{\partial} *$$

Bemerkung. In der Tat erfüllt $\bar{\partial}^*$ bezüglich des von g_M induzierten hermiteschen Produktes auf $\Lambda^\bullet(M, \mathbb{C})$, dass $\langle \bar{\partial} \cdot, \cdot \rangle = \langle \cdot, \bar{\partial}^* \cdot \rangle$.

Satz 2.3.6. [16] Für den Dirac-Operator aus (2.18) gilt

$$\mathcal{D} = \sqrt{2}(\bar{\partial} + \bar{\partial}^*).$$

Sei nun \mathcal{L} ein hermitesches komplexes Geradenbündel mit hermiteschem Zusammenhang ∇^B . Wir definieren

$$\bar{\partial}_B := \left(\pi^{0,1} \otimes \mathbf{1}_{\mathcal{L}} \right) \circ \nabla^B : \Omega(M, \mathcal{L}) \longrightarrow \Omega^{0,1}(M, \mathcal{L})$$

und setzen $\bar{\partial}_B$ durch

$$\bar{\partial}_B(\sigma \otimes l) = \bar{\partial}(\sigma) \otimes l + (-1)^{p+q} \sigma \wedge \bar{\partial}_B(l)$$

zu einem Cauchy-Riemann-Operator auf $\bigoplus_{q=0,1,2} \Omega^{p,q}(M, \mathcal{L})$ fort.

Für einen orientierten orthonormalen Rahmen $\{\ell_1, \dots, \ell_4\}$ für $T_m M$ gilt am Punkt m :

$$\bar{\partial}_B = \bar{\partial} \sigma \otimes l + \sum_{i=1}^4 \pi^{0,1}(\ell^i) \wedge \sigma \otimes \nabla_{\ell_i}^B l. \quad (2.21)$$

Der adjungierte Operator $\bar{\partial}_B^*$ erfüllt

$$\bar{\partial}_B^* = \bar{\partial}^* \sigma \otimes l - \sum_{i=1}^4 \pi^{0,1}(\ell^i) \lrcorner \sigma \otimes \nabla_{\ell_i}^B l. \quad (2.22)$$

Satz 2.3.7. *Für den Dirac-Operator aus (2.17) gilt*

$$\mathcal{D}^A = \sqrt{2}(\bar{\partial}_B + \bar{\partial}_B^*).$$

Beweis. Die Behauptung folgt direkt aus den Gleichungen (2.21) und (2.22) sowie dem Satz 2.3.6. Für $\sigma \otimes l \in \Omega^{0,q}(M, \mathcal{L})$ rechnen wir so:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^A(\sigma \otimes l) &= \sum_{i=1}^4 c(\ell^i) \nabla_{\ell_i}^{\phi \otimes B}(\sigma \otimes l) = \sum_{i=1}^4 c(\ell^i) \left(\nabla_{\ell_i}^{\phi}(\sigma) \otimes l + \sigma \otimes \nabla_{\ell_i}^B l \right) \\ &= \sum_{i=1}^4 c(\ell^i) \nabla_{\ell_i}^{\phi}(\sigma) \otimes l + c(\ell^i) \sigma \otimes \nabla_{\ell_i}^B l \\ &= \sqrt{2}(\bar{\partial} + \bar{\partial}^*)(\sigma) \otimes l + \sum_{i=1}^4 \sqrt{2} \left(\pi^{0,1}(\ell^i) \wedge \sigma - \pi^{0,1}(\ell^i) \lrcorner \sigma \right) \otimes \nabla_{\ell_i}^B l \\ &= \sqrt{2}(\bar{\partial}_B + \bar{\partial}_B^*) \end{aligned} \quad \square$$

2.4 Eine quadratische Abbildung

Der Hodge-Stern-Operator $*$ definiert eine Involution auf $\Lambda^2 T^* M$, so dass wir die reellwertigen 2-Formen in *selbstduale* und *antiselbstduale* zerlegen können:

$$\Lambda_+^2(T^* M) := \ker(1 - *) \quad \Lambda_-^2(T^* M) := \ker(1 + *)$$

Eine komplexwertige 2-Form τ nennen wir *selbstdual*, falls $*\tau = \bar{\tau}$ und *antiselbstdual*, falls $*\tau = -\bar{\tau}$ (hier bezeichnet $*$ den konjugiert-linear fortgesetzten Hodge-Stern-Operator). Wir notieren diese selbstdualen 2-Formen mit $\Omega_+^2(M, \mathbb{C})$ und die

antiselbstdualen mit $\Omega_-^2(M, \mathbb{C})$. Den selbstdualen Anteil einer 2-Form τ bezeichnen wir mit τ^+ , den antiselbstdualen mit τ^- . Für eine Kählermannigfaltigkeit M mit Kählerform ω_M haben wir folgende Zerlegung (Komplementbildung \perp bezieht sich hier auf die *Schnittform* $(\tau_1, \tau_2) \mapsto \int_M \tau_1 \wedge \tau_2$) [16]:

$$\begin{aligned}\Omega_+^2(M, \mathbb{C}) &= \Omega^{2,0}(M, \mathbb{C}) \oplus \Omega^0(M, \mathbb{C}) \cdot \omega_M \oplus \Omega^{0,2}(M, \mathbb{C}) \\ \Omega_-^2(M, \mathbb{C}) &= \left(\Omega^0(M, \mathbb{C}) \cdot \omega_M \right)^\perp \in \Omega^{1,1}(M, \mathbb{C})\end{aligned}$$

Rein imaginärwertige selbstduale 2-Formen sind dann

$$\Omega_+^2(M, i\mathbb{R}) = \Omega^0(M, i\mathbb{R}) \cdot \omega_M \oplus \left\{ \mu - \bar{\mu} \mid \mu \in \Omega^{0,2}(M, \mathbb{C}) \right\} \quad (2.23)$$

Die Clifford-Multiplikation gibt eine Identifikation von $\Omega_+^2(M, \mathbb{C})$ mit den *spurlosen Endomorphismen* des positiven Spinorbündels:

$$c: \Omega_+^2(M, \mathbb{C}) \xrightarrow{\sim} \Gamma(\text{End}_0(W_L^+)) \quad (2.24)$$

Bemerkung. Die Clifford-Multiplikation identifiziert hier genauer $\Omega_+^2(M, \mathbb{R})$ mit den antiselbstadjungierten spurlosen Endomorphismen von W_L^+ und $\Omega_+^2(M, i\mathbb{R})$ mit den selbstadjungierten spurlosen Endomorphismen. (Adjungiertheit ist bezüglich des hermiteschen Produktes auf W_L^+ gemeint.)

Weiter benutzen wir das hermitesche Produkt auf W_L^+ , um eine quadratische Abbildung zu definieren:

$$\begin{aligned}\tilde{q}: \Gamma(W_L^+) &\longrightarrow \Gamma(\text{End}_0(W_L^+)) \\ \psi &\longmapsto \langle \psi, \cdot \rangle \psi - \frac{1}{2} |\psi|^2 \mathbb{1}_{W_L^+} = \bar{\psi} \otimes \psi - \frac{1}{2} |\psi|^2 \mathbb{1}_{W_L^+}\end{aligned}$$

Bezüglich der Zerlegung $W_L^+ = \mathcal{L} \oplus K_M^{-1} \otimes \mathcal{L}$ in zwei Geradenbündel können wir $\tilde{q}(\psi)$ mit $\psi = \alpha + \beta$ auch als Matrix schreiben:

$$\tilde{q}(\alpha, \beta) = \begin{pmatrix} \frac{|\alpha|^2 - |\beta|^2}{2} & \alpha \bar{\beta} \\ \bar{\alpha} \beta & \frac{|\beta|^2 - |\alpha|^2}{2} \end{pmatrix}$$

Tatsächlich ist $\tilde{q}(\alpha, \beta)$ spurlos und selbstadjungiert. Die zugehörige imaginärwertige selbstduale 2-Form im Sinne von (2.24) ist (vergleiche dazu (2.14)-(2.16))

$$q(\alpha, \beta) := \frac{i}{4} \left(|\alpha|^2 - |\beta|^2 \right) \omega_M + \frac{1}{2} \left(\bar{\alpha} \beta - \alpha \bar{\beta} \right). \quad (2.25)$$

2.5 Die Seiberg-Witten-Gleichungen

Definition 2.5.1. Sei (M, g_M, I_M) eine Kählermannigfaltigkeit mit $\text{Spin}^{\mathbb{C}}(4)$ -Struktur P_L und q die quadratische Abbildung aus (2.25). Für einen $U(1)$ -Zusammenhang A auf dem Determinantenbündel P_{\det}^L und einen positiven Spinor $\psi \in \Gamma(W_L^+)$ definieren wir die *Seiberg-Witten-Gleichungen*:

$$\begin{cases} \not{D}^A \psi &= 0 \\ F_A^+ &= q(\psi) \end{cases}$$

Die Eichgruppe $\mathcal{G} = C^\infty(M, S^1)$ wirkt auf dem *Konfigurationsraum*

$$\mathcal{C}_L := \left\{ (A, \psi) \mid A \text{ Zusammenhang auf } P_{\det}^L, \psi \in \Gamma(W_L^+) \right\}$$

durch

$$\gamma \cdot (A, \psi) := (A^\gamma, \gamma\psi),$$

wobei $A^\gamma = A - 2\gamma^*\eta$ (vergleiche (2.7)).

In (2.20) und (2.10) haben wir bereits gesehen, dass $\mathcal{D}^{A^\gamma} = \gamma \mathcal{D}^A \gamma^{-1}$ und $F_{A^\gamma} = F_A$. Weiterhin können wir in (2.25) leicht ablesen, dass $q(\gamma\psi) = q(\psi)$. Die Eichgruppe operiert also auch auf den Lösungen der Seiberg-Witten-Gleichungen.

Definition 2.5.2. Der *Seiberg-Witten-Modulraum* ist

$$\mathcal{M}_L := \left\{ (A, \psi) \in \mathcal{C}_L \mid \not{D}^A \psi = 0, F_A^+ = q(\psi) \right\} / \mathcal{G}$$

Mit Satz 2.3.7 erhalten wir folgende Umformulierung der Seiberg-Witten-Gleichungen für einen Zusammenhang $A = \phi \otimes B^2$ und einen positiven Spinor $\psi = \alpha + \beta \in \Gamma(\mathcal{L} \oplus K_M^{-1} \otimes \mathcal{L})$:

$$\begin{cases} \bar{\partial}_B \alpha + \bar{\partial}_B^* \beta &= 0 \\ (F_A^+)^{1,1} &= \frac{i}{4} (|\alpha|^2 - |\beta|^2) \omega_M \\ F_A^{0,2} &= \frac{1}{2} \bar{\alpha} \beta \end{cases} \quad (2.26)$$

2.6 Holomorphe Beschreibung des Modulraumes

Mithilfe von (2.26) können wir den Modulraum der Seiberg-Witten-Gleichungen im Kähler-Fall in der Sprache der algebraischen Geometrie beschreiben. Wir folgen hier im Wesentlichen dem Beweis aus [14]. Dazu klären wir zunächst, wann ein Zusammenhang eine holomorphe Struktur definiert.

2.6.1 Holomorphe Zusammenhänge

Definition 2.6.1. Sei $(E, \bar{\partial})$ ein holomorphes Vektorbündel. Wir nennen einen Zusammenhang ∇ *holomorph* bezüglich der holomorphen Struktur $\bar{\partial}$, wenn

$$(\pi^{0,1} \otimes \mathbf{1}_E) \circ \nabla = \bar{\partial}.$$

Lemma/Definition 2.6.2. [20] Sei $(E, \bar{\partial}_E, h)$ ein holomorphes, hermitesches Vektorbündel über einer komplexen Mannigfaltigkeit M . Dann gibt es einen eindeutigen holomorphen, hermiteschen Zusammenhang ∇ auf E . Dieser heißt *Chern-Zusammenhang* bezüglich der holomorphen Struktur $\bar{\partial}_E$ und dem hermiteschen Produkt h .

Wie in Abschnitt 2.3.1 beschrieben, definiert ein hermitescher Zusammenhang ∇^B auf einem hermiteschem Geradenbündel einen Cauchy-Riemann-Operator $\bar{\partial}_B := \pi^{0,1} \circ \nabla^B$ (der nicht notwendigerweise eine holomorphe Struktur definiert).

Lemma 2.6.3. Sei M eine Kählermannigfaltigkeit mit $\text{Spin}^{\mathbb{C}}(4)$ -Struktur P_L und B ein Zusammenhang auf dem S^1 -Bündel L sowie $\bar{\partial}_B$ der entsprechende Cauchy-Riemann-Operator. Dann gilt für die Clifford-Multiplikation des $(0, 2)$ -Anteils der Krümmung $F_B \in \Omega^2(M, i\mathbb{R}) \subset \Omega^2(M, \mathbb{C})$

$$c(F_B^{0,2}) = \bar{\partial}_B \circ \bar{\partial}_B$$

Beweis. Da die Kählermannigfaltigkeit vierdimensional ist, rechnen wir die Gleichheit auf $\sigma \otimes l \in \Omega^0(M, \mathcal{L})$ nach. Wegen (2.5) und Notiz 2.2.3 gilt für den wie oben beschriebenen Zusammenhang $A := \phi \otimes B^2$, dass $F_A^{0,2} = 2F_B^{0,2}$.

Weiter ist $c(F_A) = c(F_A^{2,0}) + c(F_A^{1,1}) + c(F_A^{0,2})$. Schränken wir die Clifford-Multiplikation auf $\Omega^0(M, \mathcal{L})$ ein, so ist $c(F_A^{2,0})$ identisch Null, $c(F_A^{0,2})$ nimmt Werte in $\Omega^{0,2}(M, \mathcal{L})$ und $c(F_A^{1,1})$ in $\Omega^0(M, \mathcal{L})$ an (vergleiche auch Notiz 2.3.3). Also gilt an einem Punkt mit normalem Rahmen

$$\begin{aligned} c(F_B^{0,2})(\sigma \otimes l) &= \frac{1}{2} c(F_A^{0,2})(\sigma \otimes l) = \frac{1}{2} (\pi^{0,2} \otimes \mathbf{1}_{\mathcal{L}}) c(F_A)(\sigma \otimes l) \\ &= \frac{1}{4} (\pi^{0,2} \otimes \mathbf{1}_{\mathcal{L}}) \left(\sum_{i,j=1}^4 c(\ell^i) c(\ell^j) \sigma \otimes F_B(\ell_i, \ell_j)(l) \right) \\ &= \frac{1}{4} \sum_{i,j=1}^4 2 \pi^{0,1}(\ell^i) \wedge \pi^{0,1}(\ell^j) \wedge \sigma \otimes [\nabla_{\ell_i}^B, \nabla_{\ell_j}^B] l \\ &= \sum_{i,j=1}^4 \pi^{0,1}(\ell^i) \wedge \pi^{0,1}(\ell^j) \wedge \sigma \otimes \nabla_{\ell_i}^B \nabla_{\ell_j}^B l \\ &= \bar{\partial}_B \bar{\partial}_B(\sigma \otimes l). \end{aligned} \quad \square$$

Korollar 2.6.4. *Sei B ein Zusammenhang auf einem S^1 -Bündel über eine Kählermannigfaltigkeit. Dann sind äquivalent:*

- i) *Der Zusammenhang B ist holomorph.*
- ii) $F_B^{0,2} = 0$
- iii) $F_B^{2,0} = 0$
- iv) $F_B \in \Omega^{1,1}(M, i\mathbb{R})$

Beweis. Wegen $F_B = -\overline{F_B}$ gilt $F_B^{0,2} = -\overline{F_B^{2,0}}$. Damit folgt die Behauptung aus dem vorhergehenden Lemma 2.6.3. \square

2.6.2 Der Seiberg-Witten-Modulraum

Definition 2.6.5. Für eine vierdimensionale Kählermannigfaltigkeit M mit Kählerform ω_M definieren wir den Grad eines Geradenbündels \mathcal{K} durch

$$\deg(\mathcal{K}) := \int_M c_1(\mathcal{K}) \wedge \omega_M.$$

Lemma 2.6.6. [14] *Sei (M, g_M, I_M) eine Kählermannigfaltigkeit mit $\text{Spin}^{\mathbb{C}}(4)$ -Struktur P_L und $(A, \psi) = (\phi \otimes B^2, \alpha + \beta)$ eine Lösung der Seiberg-Witten-Gleichungen (2.26). Dann gilt:*

- a) $F_A^{0,2} = 0$ und $F_B^{0,2} = 0$
- b) A und B sind holomorphe Zusammenhänge.
- c) $\overline{\partial}_B^* \beta = 0$ (d. h. β ist antiholomorph bezüglich $\overline{\partial}_B$)
- d) $\overline{\partial}_B \alpha = 0$ (d. h. α ist holomorph bezüglich $\overline{\partial}_B$)
- e) *In Abhängigkeit vom Grad des Determinantenbündels $\deg(\mathcal{L}_{\det}^L)$ können folgende Fälle eintreten:*

$$\left\{ \begin{array}{ll} \psi = \alpha \neq 0 & \text{falls } \deg(\mathcal{L}_{\det}^L) < 0 \\ \psi = 0 & \text{falls } \deg(\mathcal{L}_{\det}^L) = 0 \\ \psi = \beta \neq 0 & \text{falls } \deg(\mathcal{L}_{\det}^L) > 0 \end{array} \right.$$

Beweis. a) Aus $\overline{\partial}_B \alpha + \overline{\partial}_B^* \beta = 0$ folgt

$$\overline{\partial}_B \overline{\partial}_B \alpha + \overline{\partial}_B \overline{\partial}_B^* \beta = 0$$

Wir wenden Lemma 2.6.3 an und berücksichtigen, dass $F_B^{0,2} = \frac{1}{2} F_A^{0,2}$ (vergleiche (2.5) und Notiz 2.2.3):

$$\frac{1}{2} c(F_A^{0,2}) \alpha + \overline{\partial}_B \overline{\partial}_B^* \beta = 0$$

Wegen $F_A^{0,2} = \frac{1}{2}\bar{\alpha}\beta$ ist $c(F_A^{0,2}) = \bar{\alpha}\beta$, also

$$\frac{1}{2}|\alpha|^2\beta + \bar{\partial}_B\bar{\partial}_B^*\beta = 0$$

Bilden wir das hermitesche Produkt mit β , dann liefert das nach Integration über M

$$\int_M \frac{1}{2}|\alpha|^2|\beta|^2 \text{dvol} + \int_M |\bar{\partial}_B^*\beta|^2 \text{dvol} = 0 \quad (2.27)$$

Beide Summanden sind nicht-negativ und müssen deshalb verschwinden. Nun ist aber $|\bar{\alpha}\beta|^2 = |\alpha|^2|\beta|^2$. Daraus folgt, dass $\bar{\alpha}\beta = 0$ und schließlich $F_A^{0,2} = 0$ aus den Seiberg-Witten-Gleichungen, was unmittelbar auch $F_B^{0,2} = 0$ impliziert.

- b) Die Behauptung folgt mit Korollar 2.6.4 aus a).
- c) Aus (2.27) schließen wir auch $\bar{\partial}_B^*\beta = 0$.
- d) Dass $\bar{\partial}_B\alpha = 0$, folgt dann aus den Seiberg-Witten-Gleichungen mit c).
- e) Wegen $\bar{\alpha}\beta = 0$ muss mindestens einer der beiden Faktoren auf einer offenen Teilmenge von M verschwinden. Dann aber ist dieser Faktor schon identisch Null. In der folgenden Rechnung nutzen wir, dass $F_A^- \in \omega_M^\perp$ bezüglich der Schnittform und $F_A^+ = (F_A^+)^{1,1}$ wegen a).

$$\begin{aligned} \deg(\mathcal{L}_{\det}^L) &= \int_M c_1(\mathcal{L}_{\det}^L) \wedge \omega_M = \frac{i}{2\pi} \int_M F_A \wedge \omega_M = \frac{i}{2\pi} \int_M F_A^+ \wedge \omega_M \\ &= \frac{i}{2\pi} \int_M (F_A^+)^{1,1} \wedge \omega_M = \frac{1}{4\pi} \int_M (|\beta|^2 - |\alpha|^2) \text{dvol} \end{aligned}$$

Also bestimmt das Vorzeichen von $\deg(\mathcal{L}_{\det}^L)$ wie oben angegeben, ob α oder β verschwinden muss. Ist weiter $\deg(\mathcal{L}_{\det}^L) \neq 0$, so sehen wir mit selbiger Rechnung, dass $\psi = 0$ nicht eintreten kann, da ψ in diesem Fall auf keiner offenen Teilmenge von M verschwinden darf. \square

Betrachten wir also die *Fallunterscheidung* nach dem Vorzeichen von $\deg(\mathcal{L}_{\det}^L)$.

Der Fall $\deg(\mathcal{L}_{\det}^L) = 0$. Die Lösungen der Seiberg-Witten-Gleichungen (2.26) sind gerade die *antiselbstdualen Zusammenhänge* auf P_{\det}^L . Der Modulraum ist

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_L &= \left\{ (A, 0) \in \mathcal{C}_L \mid F_A^+ = 0 \right\} / \mathcal{G} \\ &= \left\{ \text{Zusammenhänge } A \text{ auf } P_{\det}^L, \text{ so dass } F_A^+ = 0 \right\} / \mathcal{G}. \end{aligned} \quad (2.28)$$

Der Fall $\deg(\mathcal{L}_{\det}^L) < 0$. In diesem Fall sind die Lösungen der Seiberg-Witten-Gleichungen (2.26) Paare (A, α) , so dass

- A ein holomorpher Zusammenhang auf P_{\det}^L ist,
- $0 \neq \alpha \in \Gamma(\mathcal{L})$ holomorph bezüglich des durch A induzierten Zusammenhangs ist und
- $(F_A^+)^{1,1} = \frac{i}{4}|\alpha|^2\omega_M$ erfüllt ist.

Zwei solche Paare (A, α) und (A', α') repräsentieren genau dann dasselbe Element im Modulraum \mathcal{M}_L , wenn sie sich um ein Element γ in der Eichgruppe \mathcal{G} unterscheiden. Diese Äquivalenz können wir auch anders formulieren. Wir bezeichnen die zugehörigen Zusammenhänge auf L wieder mit B bzw. B' .

Lemma 2.6.7. [14] Falls $\deg(\mathcal{L}_{\det}^L) < 0$, dann sind die Lösungen (A, α) der Seiberg-Witten-Gleichungen (2.26) gegeben durch einen holomorphen Zusammenhang A und einen bezüglich der induzierten holomorphen Struktur $\bar{\partial}_B$ auf \mathcal{L} holomorphen Schnitt $0 \neq \alpha \in \Gamma(\mathcal{L})$, so dass

$$(F_A^+)^{1,1} = \frac{i}{4}|\alpha|^2\omega_M.$$

Es sind (A, α) und (A', α') genau dann eichäquivalent, wenn es einen holomorphen, hermiteschen Isomorphismus $T: (\mathcal{L}, \bar{\partial}_B) \rightarrow (\mathcal{L}, \bar{\partial}_{B'})$ gibt, der α in α' abbildet.

Beweis. Es gelte für (A, α) und (A', α') , dass $A' = A^\gamma$ und $\alpha' = \gamma\alpha$ für ein $\gamma \in \mathcal{G}$. Insbesondere definiert $\gamma \in C^\infty(M, S^1) \subset C^\infty(M, \mathbb{C}^*)$ einen hermiteschen Bündel-Isomorphismus

$$\gamma: (\mathcal{L}, \bar{\partial}_B) \longrightarrow (\mathcal{L}, \bar{\partial}_{B'}).$$

Aus $A' = A^\gamma$ bzw. $B' = B^\gamma$ folgt mit $\nabla^{B'} = \gamma\nabla^B\gamma^{-1}$ unmittelbar $\bar{\partial}_{B'} = \gamma\bar{\partial}_B\gamma^{-1}$. Also ist γ auch holomorph. Natürlich bildet der Isomorphismus α in $\alpha' = \gamma\alpha$ ab. Umgekehrt gilt für jeden holomorphen, hermiteschen Isomorphismus $T: (\mathcal{L}, \bar{\partial}_B) \rightarrow (\mathcal{L}, \bar{\partial}_{B'})$, der α in α' abbildet, dass $T \in C^\infty(M, S^1) = \mathcal{G}$ sowie $\bar{\partial}_{B'} = T\bar{\partial}_BT^{-1}$, daraus folgt mit $\partial_{B'} = \overline{T^{-1}}\partial_B\overline{T}$, dass $\nabla^{B'} = T\nabla^BT^{-1}$. Schließlich erfüllt T also auch $B' = B^T$ bzw. $A' = A^T$. \square

Bemerkung. Wenn $A' = A^\gamma$, dann erhalten wir auch auf \mathcal{L}_{\det}^L einen hermiteschen, holomorphen Bündel-Isomorphismus (vergleiche auch (2.9))

$$\gamma^2: (\mathcal{L}_{\det}^L, \bar{\partial}_A) \longrightarrow (\mathcal{L}_{\det}^L, \bar{\partial}_{A'}).$$

Wenn wir uns nur für den Modulraum der Seiberg-Witten-Gleichungen interessieren, können wir mit Hilfe des gleich folgenden Korollars 2.6.10 eine Komplexifizierung der Eichgruppe erreichen und damit auf die Gleichung $(F_A^+)^{1,1} = \frac{i}{4}|\alpha|^2\omega_M$ zwischen Krümmung und Spinor verzichten. Für den Beweis nutzen wir ein Resultat von Kazdan und Warner:

Satz 2.6.8. (Kazdan-Warner) [16], [11] *Sei M eine kompakte Riemannsche Mannigfaltigkeit. Sei k eine positive reelle Zahl und $w \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ eine Funktion, die außerhalb einer Nullmenge positiv ist. Dann hat die Gleichung*

$$\Delta_M(\lambda) + w \exp(k\lambda) = g \in C^\infty(M, \mathbb{R})$$

genau dann eine Lösung $\lambda \in C^\infty(M, \mathbb{R})$, wenn

$$\int_M g \, d\text{vol} > 0.$$

Die Lösung ist in diesem Fall eindeutig.

Lemma 2.6.9. [14] *Wir setzen $\deg(\mathcal{L}_{\det}^L) < 0$ voraus. Sei ∇^{B_0} ein holomorpher, hermitescher Zusammenhang auf \mathcal{L} und $\alpha \neq 0$ ein diesbezüglich holomorpher Schnitt von \mathcal{L} . Dann gibt es eine hermitesche Metrik h_1 auf \mathcal{L} , welche einen hermiteschen und bezüglich $\bar{\partial}_{B_0}$ holomorphen Zusammenhang ∇^{B_1} auf \mathcal{L} induziert, dessen zugehöriger Zusammenhang ∇^{A_1} auf \mathcal{L}_{\det}^L erfüllt, dass*

$$(F_{A_1}^+)^{1,1} = \frac{i}{4} |\alpha|_{h_1}^2 \omega_M. \quad (2.29)$$

Beweis. Sei h die hermitesche Metrik auf \mathcal{L} . Jede andere hermitesche Metrik h_1 können wir schreiben als $h_1 = \exp(\lambda)h$ für ein $\lambda \in C^\infty(M, \mathbb{R})$. Wir zeigen zunächst, dass für so eine Metrik

$$F_{B_1} = F_{B_0} + \bar{\partial}\partial\lambda \quad (2.30)$$

gilt, wenn B_1 der holomorphe und bezüglich h_1 hermitesche Zusammenhang auf \mathcal{L} ist. Wir können ∇^{B_0} lokal auf einer trivialisierenden Umgebung U durch eine $(1, 0)$ -Form θ beschreiben (vgl. [13]). Es sei $s \in \Gamma(U, \mathcal{L}|_U)$ ein nicht verschwindender holomorpher Schnitt. Da ∇^{B_0} hermitesch bezüglich h ist, folgt

$$d(|s|_h^2) = \langle \theta s, s \rangle + \langle s, \theta s \rangle = (\theta + \bar{\theta})|s|_h^2.$$

Projizieren wir auf den $(1, 0)$ -Anteil, erhalten wir

$$\partial(|s|_h^2) = \theta|s|_h^2 \quad \text{bzw.} \quad \theta = \partial \log(|s|_h^2).$$

Damit folgt per Definition von λ , dass

$$\nabla^{B_1} - \nabla^{B_0} = \partial \log(|s|_{h_1}^2) - \partial \log(|s|_{h_0}^2) = \partial\lambda$$

und schließlich (2.30) mit $d(\partial\lambda) = \bar{\partial}\partial\lambda$. Entsprechend folgt für die Zusammenhänge auf \mathcal{L}_{\det}^L , dass $F_{A_1} = F_{A_0} + 2\bar{\partial}\partial\lambda$. Die Forderung (2.29) an h_1 ist damit äquivalent zu der Forderung an λ

$$(F_{A_0}^+)^{1,1} + 2(\bar{\partial}\partial\lambda)^+ = \frac{i}{4} \exp(\lambda) |\alpha|_h^2 \omega_M$$

zu erfüllen. Da $\Omega_-^2(M, \mathbb{C}) = \omega_M^\perp \subset \Omega^{1,1}(M, \mathbb{C})$, ist dies äquivalent zu

$$F_{A_0} \wedge \omega_M + 2\bar{\partial}\partial\lambda \wedge \omega_M = \frac{i}{4} \exp(\lambda) |\alpha|_h^2 \omega_M \wedge \omega_M. \quad (2.31)$$

Nun ist $\omega_M = \frac{i}{2}(dz_1 \wedge d\bar{z}_1 + dz_2 \wedge d\bar{z}_2)$ die Kählerform auf M . Damit ergibt sich

$$\bar{\partial}\partial\lambda \wedge \omega_M = -\frac{2}{i} \left(\frac{\partial^2\lambda}{\partial z_1 \partial \bar{z}_1} + \frac{\partial^2\lambda}{\partial z_2 \partial \bar{z}_2} \right) \text{dvol} = \frac{2}{i} \Delta_M(\lambda) \text{dvol}.$$

Die Gleichung (2.31) ist also äquivalent zu

$$\left(\Delta_M(\lambda) + \frac{1}{8} \exp(\lambda) |\alpha|_h^2 \right) \text{dvol} = -\frac{1}{4} i F_{A_0} \wedge \omega_M.$$

Wegen $0 > \deg(\mathcal{L}_{\det}^L) = \frac{i}{2\pi} \int_M F_{A_0} \wedge \omega_M$ ist die rechte Seite $-\frac{1}{4} i F_{A_0} \wedge \omega_M = g \text{dvol}$ für eine Funktion g , die gerade die Bedingung $\int_M g \text{dvol} > 0$ des Satzes 2.6.8 erfüllt. Für die äquivalente Gleichung

$$\Delta_M(\lambda) + \frac{1}{8} \exp(\lambda) |\alpha|_h^2 = g.$$

existiert nach Satz 2.6.8 eine eindeutige Lösung $\lambda \in C^\infty(M, \mathbb{R})$. □

Korollar 2.6.10. [14] *Sei (M, g_M, I_M) eine Kählermannigfaltigkeit mit $\text{Spin}^{\mathbb{C}}(4)$ -Struktur P_L . Wir betrachten den Fall $\deg(\mathcal{L}_{\det}^L) < 0$. Dann gilt:*

- a) *Jedes Paar $(\bar{\partial}_{\mathcal{L}}, \alpha_0)$ aus einer holomorphen Struktur $\bar{\partial}_{\mathcal{L}}$ auf \mathcal{L} und einem diesbezüglich holomorphen Schnitt $\alpha_0 \in \Gamma(\mathcal{L})$, $\alpha_0 \neq 0$ bestimmt eine Lösung (A, α) der Seiberg-Witten-Gleichungen (2.26), so dass*
 - *die holomorphe Struktur $\bar{\partial}_B$ des zugehörigen Zusammenhangs B auf L isomorph zu $\bar{\partial}_{\mathcal{L}}$ ist*
 - *und ein holomorpher Isomorphismus α auf α_0 abbildet.*
- b) *Diese Lösung (A, α) ist eindeutig bis auf Eichäquivalenz.*
- c) *In diesem Sinne bestimmt jedes Paar $(\bar{\partial}_{\mathcal{L}}, \alpha_0)$ einen Punkt im Modulraum \mathcal{M}_L . Umgekehrt gibt es für jeden Punkt im Modulraum \mathcal{M}_L ein Paar $(\bar{\partial}_{\mathcal{L}}, \alpha_0)$, das den Punkt festlegt.*
- d) *Zwei Paare $(\bar{\partial}_{\mathcal{L}}, \alpha_0)$ und $(\bar{\partial}'_{\mathcal{L}}, \alpha'_0)$ bestimmen genau dann denselben Punkt im Modulraum \mathcal{M}_L , wenn die holomorphen Strukturen $\bar{\partial}_{\mathcal{L}}$ und $\bar{\partial}'_{\mathcal{L}}$ isomorph sind und ein holomorpher Isomorphismus dieser beiden Strukturen α_0 auf ein skalares Vielfaches von α'_0 abbildet.*

Beweis. a) Sei $(\bar{\partial}_{\mathcal{L}}, \alpha_0)$ eine holomorphe Struktur auf \mathcal{L} mit einem holomorphen Schnitt $\alpha_0 \in \Gamma(\mathcal{L})$. Wir bezeichnen die hermitesche Metrik auf \mathcal{L} wieder mit h und den bezüglich h hermiteschen und bezüglich $\bar{\partial}_{\mathcal{L}}$ holomorphen Zusammenhang auf \mathcal{L} mit ∇^{B_0} .

Nach Lemma 2.6.9 gibt es eine hermitesche Metrik h_1 auf \mathcal{L} , welche einen hermiteschen und bezüglich $\bar{\partial}_{B_0} = \bar{\partial}_{\mathcal{L}}$ holomorphen Zusammenhang ∇^{B_1} auf \mathcal{L} induziert, dessen zugehöriger Zusammenhang ∇^{A_1} auf \mathcal{L}_{\det}^L erfüllt, dass

$$(F_{A_1}^+)^{1,1} = \frac{i}{4} |\alpha_0|_{h_1}^2 \omega_M. \quad (2.32)$$

Sei nun $T \in \text{Aut}(\mathcal{L})$, so dass $T^*(h_1) = h$. Die Existenz von T folgt auch aus Lemma 2.6.9. Wir können zum Beispiel $T(l) = \sqrt{\frac{1}{\exp(\lambda)}} l$ setzen, falls $h_1 = \exp(\lambda)h$ mit $\lambda \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ wie im Lemma 2.6.9. Andererseits gilt für T zwingend $\bar{T}T \exp(\lambda) = 1$. Aus der Eindeutigkeit von λ folgt also, dass T eindeutig bis auf eine Eichtransformation $\gamma \in C^\infty(M, S^1) = \mathcal{G}$ ist. Es ist $T(l) = \sqrt{\frac{1}{\exp(\lambda)}} \gamma(l)$ für ein $\gamma \in \mathcal{G}$.

Für $T \in \text{Aut}(\mathcal{L})$ mit $T^*(h_1) = h$ setzen wir nun $\alpha = T^{-1}(\alpha_0)$ sowie $\nabla^B = T^*(\nabla^{B_1})$. Wegen $\bar{\partial}_{\mathcal{L}} = \bar{\partial}_{B_0} = \bar{\partial}_{B_1}$ ist T ein holomorpher Isomorphismus $T: (\mathcal{L}, \bar{\partial}_B) \rightarrow (\mathcal{L}, \bar{\partial}_{\mathcal{L}})$, der α auf α_0 abbildet. Weiterhin ist ∇^B hermitesch bezüglich h , da ∇^{B_1} hermitesch bezüglich h_1 ist:

$$\begin{aligned} d(h(l_1, l_2))(X) &= d(h_1(T(l_1), T(l_2)))(X) \\ &= h_1(\nabla_X^{B_1} T(l_1), T(l_2)) + h_1(T(l_1), \nabla_X^{B_1} T(l_2)) \\ &= h(T^{-1} \nabla_X^{B_1} T(l_1), l_2) + h(l_1, T^{-1} \nabla_X^{B_1} T(l_2)) \\ &= h(\nabla_X^B(l_1), l_2) + h(l_1, \nabla_X^B(l_2)) \end{aligned}$$

Also definiert ∇^B einen Zusammenhang B auf L bzw. einen entsprechenden Zusammenhang A auf P_{\det}^L . Damit das Paar (A, α) tatsächlich eine Lösung der Seiberg-Witten-Gleichungen ist, welche den Bedingungen des Satzes genügt, müssen wir noch zeigen, dass

$$(F_A^+)^{1,1} = \frac{i}{4} |\alpha|_h^2 \omega_M.$$

Das folgt aber mit $F_B = T^{-1} F_{B_1} T = F_{B_1}$ und $|\alpha|_h^2 = |T(\alpha)|_{h_1}^2 = |\alpha_0|_{h_1}^2$ aus (2.32).

- b) Die Eindeutigkeit von (A, α) bis auf Eichäquivalenz folgt aus der Eindeutigkeit von T bis auf eine Eichtransformation (siehe a)).
- c) Alle Punkte des Modulraumes \mathcal{M}_L werden getroffen. Sei (A, α) eine Lösung der Seiberg-Witten-Gleichungen und B der entsprechende Zusammenhang auf L . Dann liefert obige Prozedur für das Paar $(\bar{\partial}_B, \alpha)$, dass $\lambda = 1$ sowie $T \in \mathcal{G}$ und wir erhalten die Bahn von (A, α) unter der Eichgruppe \mathcal{G} zurück.

- d) Sei $S: (\mathcal{L}, \bar{\partial}_{\mathcal{L}}) \rightarrow (\mathcal{L}, \bar{\partial}'_{\mathcal{L}})$ ein holomorpher Isomorphismus, der α_0 auf ein skalares Vielfaches von α'_0 abbildet. Durch Skalieren mit einer konstanten Funktion können wir auch annehmen, dass $S(\alpha_0) = \alpha'_0$. Dann existieren (wie in a) beschrieben) hermitesche Metriken $h_1 = \exp(\lambda)h$ und $h'_1 = \exp(\lambda')h$ mit entsprechenden bezüglich $\bar{\partial}_{\mathcal{L}}$ bzw. $\bar{\partial}'_{\mathcal{L}}$ holomorphen Zusammenhängen ∇^{B_1} und $\nabla^{B'_1}$ auf \mathcal{L} und entsprechenden Zusammenhängen ∇^{A_1} und $\nabla^{A'_1}$ auf \mathcal{L}_{\det}^L , die

$$(F_{A_1}^+)^{1,1} = \frac{i}{4} |\alpha_0|_{h_1}^2 \omega_M \quad \text{und} \quad (F_{A'_1}^+)^{1,1} = \frac{i}{4} |\alpha'_0|_{h'_1}^2 \omega_M \quad (2.33)$$

erfüllen. Insbesondere ist S dann auch ein holomorpher Isomorphismus $S: (\mathcal{L}, \bar{\partial}_{B_1}) \rightarrow (\mathcal{L}, \bar{\partial}_{B'_1})$, sodass $F_{B_1} = F_{B'_1}$ sowie $F_{A_1} = F_{A'_1}$.

Mit (2.33) erhalten wir $|\alpha_0|_{h_1}^2 = |S(\alpha_0)|_{h'_1}^2 = |\alpha_0|_{S^*(h'_1)}^2$. Für $S \in \text{Aut}(\mathcal{L})$ folgt, da der holomorphe Schnitt α_0 allenfalls auf einer Nullmenge verschwindet, dass $S^*(h'_1) = h_1$. Der holomorphe Isomorphismus S ist also auch ein hermitescher Isomorphismus $S: (\mathcal{L}, \bar{\partial}_{B_1}, h_1) \rightarrow (\mathcal{L}, \bar{\partial}_{B'_1}, h'_1)$. Jede Lösung (A, α) , die wir mit der Prozedur aus a) mit $T \in \text{Aut}(\mathcal{L})$ aus dem Paar $(\bar{\partial}_{\mathcal{L}}, \alpha_0)$ gewinnen, erhalten wir mit $ST \in \text{Aut}(\mathcal{L})$ auch aus dem Paar $(\bar{\partial}'_{\mathcal{L}}, \alpha'_0)$.

Seien nun $(\bar{\partial}_{\mathcal{L}}, \alpha_0)$ und $(\bar{\partial}'_{\mathcal{L}}, \alpha'_0)$ so gewählt, dass sie denselben Punkt im Modulraum \mathcal{M}_L bestimmen. Wir wählen einen Repräsentanten (A, α) und bezeichnen den entsprechenden Zusammenhang auf L wieder mit B . Nach a) gibt es holomorphe Isomorphismen $T: (\mathcal{L}, \bar{\partial}_B) \rightarrow (\mathcal{L}, \bar{\partial}_{\mathcal{L}})$ sowie $T': (\mathcal{L}, \bar{\partial}_B) \rightarrow (\mathcal{L}, \bar{\partial}'_{\mathcal{L}})$, so dass $T(\alpha) = \alpha_0$ und $T'(\alpha) = \alpha'_0$. Dann ist $T'T^{-1}: (\bar{\partial}_{\mathcal{L}}, \alpha_0) \rightarrow (\bar{\partial}'_{\mathcal{L}}, \alpha'_0)$ ein holomorpher Isomorphismus, der $T'T^{-1}(\alpha_0) = \alpha'_0$ erfüllt. \square

Bemerkung. (zum Beweis von Korollar 2.6.10 d)) Jeder andere holomorphe Isomorphismus $(\bar{\partial}_{\mathcal{L}}, \alpha_0) \rightarrow (\bar{\partial}'_{\mathcal{L}}, \alpha'_0)$ bildet α_0 auf ein skalares Vielfaches von α'_0 ab. Insbesondere bestimmen $(\bar{\partial}_{\mathcal{L}}, \alpha_0)$ und $(\bar{\partial}_{\mathcal{L}}, \lambda_0 \alpha_0)$ genau dann denselben Punkt im Modulraum, wenn $\lambda_0 \in \mathbb{C}^*$.

Das Korollar 2.6.10 präzisiert die folgende Bijektion (vergleiche auch Abschnitt 1.4):

Satz 2.6.11. *Falls $\text{deg}(\mathcal{L}_{\det}^L) < 0$, dann gibt es eine Bijektion*

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_L &\cong \bigcup_{\bar{\partial}_{\mathcal{L}} \in \text{Hol}(\mathcal{L})} \mathbb{P}(\check{H}^0(M, (\mathcal{L}, \bar{\partial}_{\mathcal{L}}))) \\ &\cong \{ \text{effektive Divisoren } D, \text{ so dass } c_1(\mathcal{O}_M(D)) = c_1(\mathcal{L}) \}. \end{aligned} \quad (2.34)$$

Der Fall $\deg(\mathcal{L}_{\det}^L) > 0$. In diesem Fall sind die Lösungen der Seiberg-Witten-Gleichungen (2.26) Paare (A, β) , so dass

- A ein holomorpher Zusammenhang auf P_{\det}^L ist,
- $0 \neq \beta \in \Gamma(K_M^{-1} \otimes \mathcal{L})$ antiholomorph bezüglich des durch A induzierten Zusammenhangs ist und
- $(F_A^+)^{1,1} = -\frac{i}{4}|\beta|^2\omega_M$ erfüllt ist.

Ähnlich zum Fall $\deg(\mathcal{L}_{\det}^L) < 0$ führen hier analoge Überlegungen zu dem Resultat:

Satz 2.6.12. Falls $\deg(\mathcal{L}_{\det}^L) > 0$, dann gibt es eine Bijektion

$$\mathcal{M}_L \cong \left\{ \text{effektive Divisoren } D, \text{ so dass } c_1(\mathcal{O}_M(D)) = c_1(K_M \otimes \mathcal{L}^{-1}) \right\}. \quad (2.35)$$

Bemerkung. Wir haben die Bijektionen (2.34) und (2.35) hier nur als Bijektionen von Mengen betrachtet. Tatsächlich erhalten Friedman und Morgan diese Bijektionen in [5] als *Diffeomorphismen*, falls $H^2(M, \mathcal{O}_M) = 0$.

3 Verallgemeinerte Seiberg-Witten-Gleichungen

Die Seiberg-Witten-Gleichungen verallgemeinern wir hier auf die folgende Situation: Zunächst ersetzen wir im positiven Spinorbündel $W_L^+ = Q_L \times_{S^1 \times S^1} \mathbb{H}$ (vergleiche (2.3)) die Hyperkähler-Faser \mathbb{H} durch eine vierdimensionale Hyperkählermannigfaltigkeit X mit geeigneter $S^1 \times S^1$ -Wirkung auf X und konstruieren einen nicht-linearen Dirac-Operator. Die diagonale S^1 -Wirkung ist Hamiltonsch bezüglich der drei komplexen Strukturen auf X und erlaubt drei Momentenabbildungen, mit denen wir eine neue quadratische Abbildung definieren. Mit diesen beiden Konstruktionen formulieren wir eine Verallgemeinerung der Seiberg-Witten-Gleichungen. Schließlich rechnen wir nach, dass die Eichgruppe $C^\infty(M, S^1)$ auch auf den Lösungen der verallgemeinerten Gleichungen wirkt.

3.1 Das lineare Modell der Faser

Bevor wir uns dem verallgemeinerten positiven Spinorbündel zuwenden, fassen wir noch ein paar Eigenschaften der linearen Faser \mathbb{H} zusammen. Wir betrachten die Beschreibung des positiven Spinorbündels aus (2.3) durch

$$W_L^+ = Q_L \times_{\rho_\gamma \oplus \rho_\delta} \mathbb{H}$$

mit folgender isometrischer $S^1 \times S^1$ -Wirkung auf \mathbb{H} :

$$(\rho_\gamma \oplus \rho_\delta)(e^{i\gamma}, e^{i\delta})(z_1 + jz_2) = e^{i\gamma} z_1 + j e^{i\delta} z_2$$

Weiter betrachten wir die durch die Linksmultiplikation mit $i_1 := i, i_2 := j, i_3 := k$ gegebene Hyperkählerstruktur auf \mathbb{H} :

$$I_1 := I := L_{i_1} := L_i \quad I_2 := J := L_{i_2} := L_j \quad I_3 := K := L_{i_3} := L_k$$

Notiz 3.1.1. Die komplexe Struktur I induziert, da sie mit der Darstellung $\rho_\gamma \oplus \rho_\delta$ kommutiert, eine zusätzliche komplexe Struktur auf W_L^+ . Wenn wir W_L^+ mit dieser komplexen Struktur versehen, schreiben wir (W_L^+, I) .

Für die drei symplektischen Formen $\omega_l = g_{\mathbb{H}}(\cdot, I_l \cdot)$ setzen wir

$$\omega_{\mathbb{H}} := \omega_I i + \omega_J j + \omega_K k = \sum_{l=1}^3 \omega_l i_l$$

Lemma 3.1.2. *Es gilt $\omega_{\mathbb{H}} = \frac{1}{2}dh \wedge d\bar{h}$.*

Beweis. Für $x, y \in \mathbb{H}$ ist

$$\begin{aligned}\omega_{\mathbb{H}}(x, y) &= \omega_I(x, y)i + \omega_J(x, y)j + \omega_K(x, y)k \\ &= g_{\mathbb{H}}(x, iy)i + g_{\mathbb{H}}(x, jy)j + g_{\mathbb{H}}(x, ky)k \\ &= \operatorname{Re}(iy\bar{x})i + \operatorname{Re}(jy\bar{x})j + \operatorname{Re}(ky\bar{x})k \\ &= -\operatorname{Im}(y\bar{x}) = \operatorname{Im}(x\bar{y}) = \frac{1}{2}(x\bar{y} - y\bar{x}) = \frac{1}{2}dh \wedge d\bar{h}(x, y) \quad \square\end{aligned}$$

Unter der $S^1 \times S^1$ -Wirkung gilt für die Hyperkählerstruktur

$$\begin{aligned}(e^{i\gamma}, e^{i\delta})I(e^{-i\gamma}, e^{-i\delta}) &= I \\ (e^{i\gamma}, e^{i\delta})J(e^{-i\gamma}, e^{-i\delta}) &= \cos(\gamma - \delta)J + \sin(\gamma - \delta)K \\ (e^{i\gamma}, e^{i\delta})K(e^{-i\gamma}, e^{-i\delta}) &= -\sin(\gamma - \delta)J + \cos(\gamma - \delta)K.\end{aligned} \quad (3.1)$$

Die *diagonale S^1 -Wirkung*

$$e^{i\beta} \cdot (z_1 + jz_2) = (\rho_\gamma \oplus \rho_\delta)(e^{i\beta}, e^{i\beta})(z_1 + jz_2) = e^{i\beta}z_1 + je^{i\beta}z_2 = R_{e^{i\beta}}(z_1 + jz_2),$$

welche durch Rechtsmultiplikation mit Elementen aus S^1 gegeben ist, ist also *hyperkählersch*. Wir zeigen nun, dass diese Wirkung auch *Hamiltonsch* ist:

Lemma 3.1.3. *Wir betrachten die durch Linksmultiplikation mit i, j, k auf \mathbb{H} gegebene Hyperkählerstruktur mit den zugehörigen Kählerformen $\omega_l = g_{\mathbb{H}}(\cdot, I_l \cdot)$ und die Gruppenwirkung von S^1 , die auf \mathbb{H} durch Rechtsmultiplikation gegeben ist. Bezüglich der drei Kählerstrukturen existieren drei Momentenabbildungen $\mu_I, \mu_J, \mu_K: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{R} \cong (i\mathbb{R})^*$, so dass für*

$$\mu_{\mathbb{H}} := \mu_I i + \mu_J j + \mu_K k = \sum_{l=1}^3 \mu_l i_l \quad \text{gilt} \quad \mu_{\mathbb{H}}(h) = \frac{1}{2}hi\bar{h}. \quad (3.2)$$

Beweis.

$$\begin{aligned}d\left(\frac{1}{2}hi\bar{h}\right)(v) &= \frac{1}{2}(vi\bar{h} + hiv) = \frac{1}{2}(vi\bar{h} - \overline{vi\bar{h}}) = \operatorname{Im}(vi\bar{h}) \\ &= \operatorname{Re}(-ivi\bar{h})i + \operatorname{Re}(-jvi\bar{h})j + \operatorname{Re}(-kvi\bar{h})k \\ &= \operatorname{Re}(iv\bar{h}i)i + \operatorname{Re}(jv\bar{h}i)j + \operatorname{Re}(kv\bar{h}i)k \\ &= g_{\mathbb{H}}(hi, iv)i + g_{\mathbb{H}}(hi, jv)j + g_{\mathbb{H}}(hi, kv)k \\ &= \omega_I(K^i|_h, v)i + \omega_J(K^i|_h, v)j + \omega_K(K^i|_h, v)k \\ &= d\mu_I|_h(v)i + d\mu_J|_h(v)j + d\mu_K|_h(v)k = d\mu_{\mathbb{H}}|_h(v) \quad \square\end{aligned}$$

Bemerkung. Dafür identifizieren wir $\mathfrak{s}^{1*} = (i\mathbb{R})^* \cong \mathbb{R}$ durch $\langle r, it \rangle := rt$ für $r \in \mathbb{R}$ und $it \in i\mathbb{R} = \mathfrak{s}^1$.

Explizit sind die drei Momentenabbildungen auf $\mathbb{H} = \mathbb{C} + j\mathbb{C} \cong \mathbb{C}^2$ wie folgt gegeben:

$$\mu_I(z_1, z_2) = \frac{1}{2} (|z_1|^2 - |z_2|^2) \quad \mu_J(z_1, z_2) = -\operatorname{Im}(\bar{z}_1 z_2) \quad \mu_K(z_1, z_2) = -\operatorname{Re}(\bar{z}_1 z_2)$$

Notiz 3.1.4. Die Abbildung $\mu_{\mathbb{H}}: \mathbb{H} \rightarrow \operatorname{Im}(\mathbb{H})$ ist regulär auf $\mathbb{H} \setminus \{0\}$ und beschreibt $\mathbb{H} \setminus \{0\}$ als S^1 -Hauptfaserbündel über $\mu_{\mathbb{H}}(\mathbb{H}) \setminus \{0\}$. Tatsächlich ist $\mu_{\mathbb{H}}$ eingeschränkt auf S^3 ein *Hopf-Bündel* $S^3 \rightarrow S^2$.

Dass die drei Momentenabbildungen invariant unter der S^1 -Wirkung sind, können wir leicht an (3.13) ablesen. Die Momentenabbildung μ_I ist sogar invariant unter der $S^1 \times S^1$ -Wirkung und definiert daher eine Abbildung

$$\mu_I: \Gamma(W_L^+) \longrightarrow \Omega^0(M, \mathbb{R}).$$

Es sei weiter

$$\mu_{\mathbb{C}} := \mu_J + i\mu_K \quad (\text{so dass } \mu_{\mathbb{H}} = \mu_I i + \mu_{\mathbb{C}} j, \text{ d. h. } \mu_{\mathbb{C}}(z_1 + jz_2) = -iz_1 \bar{z}_2)$$

Es ist $\mu_{\mathbb{C}}(e^{i\gamma} z_1, e^{i\delta} z_2) = e^{i(\gamma-\delta)} \mu_{\mathbb{C}}(z_1, z_2)$. Betrachten wir also nun das Geradenbündel $Q_L \times_{\rho_{\gamma-\delta}} \mathbb{C}$ mit der Darstellung $\rho_{\gamma-\delta}: S^1 \times S^1 \rightarrow \operatorname{U}(1)$, $(e^{i\gamma_0}, e^{i\delta_0}) \mapsto e^{i(\gamma_0-\delta_0)}$. Wegen

$$\begin{aligned} Q_L \times_{\rho_{\gamma-\delta}} \mathbb{C} &= Q_L \times_{\rho_{\gamma-\delta}} \mathbb{C} \otimes \mathbb{C} \\ &= [L \times_{S^1} \mathbb{C}] \otimes \left[\left((P_{\operatorname{U}(2)} \times_{\det} S^1) \times_{S^1} L \right) \times_{\overline{S^1}} \mathbb{C} \right] \\ &= \mathcal{L} \otimes (K_M \otimes \mathcal{L}^{-1}) = K_M = \Lambda^{2,0}(T^*M). \end{aligned} \quad (3.3)$$

definiert $\mu_{\mathbb{C}}$ eine Abbildung

$$\mu_{\mathbb{C}}: \Gamma(W_L^+) \longrightarrow \Omega^{2,0}(M, \mathbb{C}).$$

In der Tat gilt für die quadratische Abbildung (2.25), dass

$$\begin{aligned} q(\psi) &= \frac{i}{2} \mu_I(\psi) \omega_M + \frac{1}{2} (i\mu_{\mathbb{C}} + i\overline{\mu_{\mathbb{C}}})(\psi) \\ &= \frac{i}{2} (\mu_I(\psi) \omega_M + \mu_{\mathbb{C}}(\psi) + \overline{\mu_{\mathbb{C}}}(\psi)) \end{aligned} \quad (3.4)$$

(vergleiche hierzu auch Notiz 2.3.3 für das Vorzeichen). Die zweite Seiberg-Witten-Gleichung wird damit zu (vergleiche (2.26))

$$\begin{cases} (F_A^+)^{1,1} &= \frac{i}{2} \mu_I(\psi) \omega_M \\ F_A^{0,2} &= \frac{i}{2} \overline{\mu_{\mathbb{C}}}(\psi) \end{cases} \quad (3.5)$$

In Lemma 2.6.6 haben wir bereits gesehen, dass für eine Lösung (A, ψ) der Seiberg-Witten-Gleichung $F_A^{0,2} = \frac{i}{2} \overline{\mu_{\mathbb{C}}}(\psi) = 0$ gilt.

3.2 Gibbons-Hawking-Räume als Faser

Für die neue nicht-lineare Faser geben wir zunächst eine Beschreibung in Karten an, die (bis auf die quaternionsche Bezeichnung) in [21] hergeleitet wurde. Daran können wir die für uns wichtigen Eigenschaften ablesen. Schließlich vollziehen wir noch eine elegantere Beschreibung für den *2-Center-Gibbons-Hawking-Fall* als Hyperkähler-Reduktion von \mathbb{H}^2 nach.

3.2.1 Beschreibung in Karten

Da wir später auf eine explizite Beschreibung der Gibbons-Hawking-Räume zurückgreifen müssen, geben wir in diesem Abschnitt einen Atlas dafür an. Eine Herleitung für diesen Ansatz ist [21] zu entnehmen. Wir orientieren uns an der selbigen Notation: Für die Koordinatenbeschreibung eines *k-Center-Gibbons-Hawking-Raumes* X fixieren wir k Zentren:

$$y_\alpha = a_\alpha i \in \text{Im}(\mathbb{H}) = \mathbb{R}^3 \quad \text{mit } a_1 < \dots < a_k$$

Sei $\epsilon > 0$ hinreichend klein in Bezug auf die Abstände der $\{a_\alpha\}_{\alpha=1}^k$. Dann setzen wir für die Karten $(U_\alpha, \phi_\alpha)_{\alpha=0}^k$ sowie $(V_\alpha, \psi_\alpha)_{\alpha=1}^k$

$$\begin{aligned} V_\alpha &= B_\epsilon(0) \subset \mathbb{H} \\ U_0 &= \{x_1 i + x_2 j + x_3 k \mid x_1 < a_1\} \times S^1 \\ U_1 &= (\{x_1 i + x_2 j + x_3 k \mid x_1 < a_2\} \setminus \\ &\quad \{x_1 i + x_2 j + x_3 k \mid x_1 \leq a_1, x_2 = x_3 = 0\}) \times S^1 \\ U_\alpha &= (\{x_1 i + x_2 j + x_3 k \mid a_{\alpha-1} < x_1 < a_{\alpha+1}\} \setminus \\ &\quad \{x_1 i + x_2 j + x_3 k \mid x_1 \leq a_\alpha, x_2 = x_3 = 0\}) \times S^1 \\ U_k &= (\{x_1 i + x_2 j + x_3 k \mid a_{k-1} < x_1\} \setminus \\ &\quad \{x_1 i + x_2 j + x_3 k \mid x_1 \leq a_k, x_2 = x_3 = 0\}) \times S^1 \end{aligned}$$

mit den folgenden (miteinander verträglichen) Kartenwechseln:

$$\begin{aligned} \phi_{\alpha-1}^{-1} \psi_\alpha(\underbrace{z_1 + jz_2}_h) &= \left(y_\alpha - \frac{1}{2} h i \bar{h}, \frac{z_1}{|z_1|} \right) \quad \text{auf } \{z_1 + jz_2 \in B_\epsilon(0) \mid |z_2| < |z_1|\} \\ \phi_\alpha^{-1} \psi_\alpha(\underbrace{z_1 + jz_2}_h) &= \left(y_\alpha - \frac{1}{2} h i \bar{h}, -\frac{z_2}{|z_2|} \right) \quad \text{auf } \{z_1 + jz_2 \in B_\epsilon(0) \mid z_2 \neq 0\} \\ \phi_{\alpha-1}^{-1} \phi_\alpha(x, \theta) &= \left(x, i \frac{\bar{z}}{|z|} \theta \right) \tag{3.6} \\ &\quad \text{auf } \{x_1 i + jz \mid a_{\alpha-1} < x_1 < a_\alpha, z \neq 0 \in \mathbb{C}\} \times S^1 \end{aligned}$$

Die Verträglichkeit ergibt sich aus

$$\begin{aligned} \phi_{\alpha-1}^{-1} \phi_{\alpha} \circ \phi_{\alpha}^{-1} \psi_{\alpha} \underbrace{(z_1 + j z_2)}_h &= \phi_{\alpha-1}^{-1} \phi_{\alpha} \left(y_{\alpha} - \frac{1}{2} h i \bar{h}, -\frac{z_2}{|z_2|} \right) \\ &= \left(y_{\alpha} - \frac{1}{2} h i \bar{h}, -i \frac{-i \bar{z}_1 z_2}{|-i \bar{z}_1 z_2|} \frac{z_2}{|z_2|} \right) = \left(y_{\alpha} - \frac{1}{2} h i \bar{h}, \frac{z_1}{|z_1|} \right). \end{aligned}$$

Wir notieren weiterhin für $\alpha = 0, \dots, k$

$$l_{\alpha} = |x - y_{\alpha}| \quad \text{und} \quad h_{\alpha} = x_1 - a_{\alpha}$$

und setzen damit für $p = (x_1 i + x_2 j + x_3 k, \theta) = (x, \theta) \in U_{\alpha}$

$$V(p) := \frac{1}{2} \sum_{j=1}^k \frac{1}{l_j}$$

$$W^{\alpha}(p) := \frac{1}{2} \left(\sum_{j=1}^{\alpha} \frac{1}{l_j (h_j + l_j)} + \sum_{j=\alpha+1}^k \frac{1}{l_j (h_j - l_j)} \right)$$

$$B_2^{\alpha}(p) := -x_3 \cdot W^{\alpha}(p)$$

$$B_3^{\alpha}(p) := x_2 \cdot W^{\alpha}(p)$$

Betrachten wir nun die folgenden lokalen Endomorphismen $(I^{\alpha}, J^{\alpha}, K^{\alpha})$ sowie die Bilinearform g^{α} in der Basis $\frac{\partial}{\partial \theta}, \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}$ von TU_{α} :

$$I_p^{\alpha} = \frac{1}{V} \begin{pmatrix} 0 & -V^2 & -V B_3^{\alpha} & V B_2^{\alpha} \\ 1 & 0 & B_2^{\alpha} & B_3^{\alpha} \\ 0 & 0 & 0 & -V \\ 0 & 0 & V & 0 \end{pmatrix} \quad J_p^{\alpha} = \frac{1}{V} \begin{pmatrix} -B_2^{\alpha} & V B_3^{\alpha} & -((B_2^{\alpha})^2 + V^2) & -B_2^{\alpha} B_3^{\alpha} \\ 0 & 0 & 0 & V \\ 1 & 0 & B_2^{\alpha} & B_3^{\alpha} \\ 0 & -V & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$K_p^{\alpha} = \frac{1}{V} \begin{pmatrix} -B_3^{\alpha} & -V B_2^{\alpha} & -B_2^{\alpha} B_3^{\alpha} & -((B_3^{\alpha})^2 + V^2) \\ 0 & 0 & -V & 0 \\ 0 & V & 0 & 0 \\ 1 & 0 & B_2^{\alpha} & B_3^{\alpha} \end{pmatrix} \quad (3.7)$$

$$g^{\alpha}|_p = \frac{1}{V} \begin{pmatrix} 1 & 0 & B_2^{\alpha} & B_3^{\alpha} \\ 0 & V^2 & 0 & 0 \\ B_2^{\alpha} & 0 & V^2 + (B_2^{\alpha})^2 & B_2^{\alpha} B_3^{\alpha} \\ B_3^{\alpha} & 0 & B_2^{\alpha} B_3^{\alpha} & V^2 + (B_3^{\alpha})^2 \end{pmatrix}. \quad (3.8)$$

Lemma 3.2.1. *Die lokalen Endomorphismen $(I^\alpha, J^\alpha, K^\alpha)$ und die lokale Bilinearform g^α definieren eine globale Hyperkählerstruktur (I, J, K, g) auf X .*

Beweis. 1. $(I^\alpha, J^\alpha, K^\alpha, g^\alpha)$ definieren eine lokale Hyperkählerstruktur:

Um einzusehen, dass (3.8) tatsächlich eine Metrik definiert, können wir zum Beispiel die Hauptminoren berechnen. Wir sehen dann mit $V > 0$, dass g^α positiv definit ist. Offenbar erfüllen $(I^\alpha, J^\alpha, K^\alpha)$ auch, dass $(I^\alpha)^2 = (J^\alpha)^2 = (K^\alpha)^2 = -\mathbf{1}_{TU\alpha} = I^\alpha J^\alpha K^\alpha$ und sind mit der Metrik g^α verträglich. Nach Lemma 1.1.6 bleibt uns zu prüfen, dass die folgenden induzierten Formen geschlossen sind:

$$\begin{aligned}\omega_{I^\alpha} &= g^\alpha(\cdot, I^\alpha \cdot) = dx_1 \wedge (d\theta + B_2^\alpha dx_2 + B_3^\alpha dx_3) - V dx_2 \wedge dx_3 \\ \omega_{J^\alpha} &= g^\alpha(\cdot, J^\alpha \cdot) = dx_2 \wedge (d\theta + B_2^\alpha dx_2 + B_3^\alpha dx_3) + V dx_1 \wedge dx_3 \\ \omega_{K^\alpha} &= g^\alpha(\cdot, K^\alpha \cdot) = dx_3 \wedge (d\theta + B_2^\alpha dx_2 + B_3^\alpha dx_3) - V dx_2 \wedge dx_1\end{aligned}\quad (3.9)$$

Es ist

$$d\omega_{I^\alpha} = 0 \iff \frac{\partial B_2^\alpha}{\partial x_3} - \frac{\partial B_3^\alpha}{\partial x_2} - \frac{\partial V}{\partial x_1} = 0 \quad (\text{I})$$

$$d\omega_{J^\alpha} = 0 \iff \frac{\partial B_3^\alpha}{\partial x_1} - \frac{\partial V}{\partial x_2} = 0 \quad (\text{II})$$

$$d\omega_{K^\alpha} = 0 \iff \frac{\partial B_2^\alpha}{\partial x_1} + \frac{\partial V}{\partial x_3} = 0. \quad (\text{III})$$

Berechnen wir also mit $\frac{\partial l_j}{\partial x_1} = \frac{h_j}{l_j}$, $\frac{\partial l_j}{\partial x_2} = \frac{x_2}{l_j}$, $\frac{\partial l_j}{\partial x_3} = \frac{x_3}{l_j}$ sowie $\frac{\partial h_j}{\partial x_i} = \delta_{1i}$ ($i = 1, 2, 3$)

$$\frac{\partial V}{\partial x_1} = -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^k \frac{h_j}{l_j^3} \quad \frac{\partial V}{\partial x_2} = -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^k \frac{x_2}{l_j^3} \quad \frac{\partial V}{\partial x_3} = -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^k \frac{x_3}{l_j^3}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial W^\alpha}{\partial x_1} &= -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^{\alpha} \frac{1}{l_j^2 (h_j + l_j)^2} \left(\frac{h_j}{l_j} (h_j + l_j) + l_j \left(1 + \frac{h_j}{l_j} \right) \right) \\ &\quad - \frac{1}{2} \sum_{j=\alpha+1}^k \frac{1}{l_j^2 (h_j - l_j)^2} \left(\frac{h_j}{l_j} (h_j - l_j) + l_j \left(1 - \frac{h_j}{l_j} \right) \right) = -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^k \frac{1}{l_j^3} \\ \frac{\partial W^\alpha}{\partial x_2} &= -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^{\alpha} \frac{1}{l_j^2 (h_j + l_j)^2} \left(\frac{x_2}{l_j} (h_j + l_j) + l_j \left(0 + \frac{x_2}{l_j} \right) \right) \\ &\quad - \frac{1}{2} \sum_{j=\alpha+1}^k \frac{1}{l_j^2 (h_j - l_j)^2} \left(\frac{x_2}{l_j} (h_j - l_j) + l_j \left(0 - \frac{x_2}{l_j} \right) \right) \\ &= -\frac{x_2}{2} \underbrace{\left[\sum_{j=1}^{\alpha} \frac{h_j + 2l_j}{l_j^3 (h_j + l_j)^2} + \sum_{j=\alpha+1}^k \frac{h_j - 2l_j}{l_j^3 (h_j - l_j)^2} \right]}_{=: T^\alpha} = -\frac{x_2}{2} T^\alpha\end{aligned}$$

$$\frac{\partial W^\alpha}{\partial x_3} = -\frac{x_3}{2} \left[\sum_{j=1}^{\alpha} \frac{h_j + 2l_j}{l_j^3 (h_j + l_j)^2} + \sum_{j=\alpha+1}^k \frac{h_j - 2l_j}{l_j^3 (h_j - l_j)^2} \right] = -\frac{x_3}{2} T^\alpha \quad (\text{analog})$$

Folglich ist unter Beachtung von $x_2^2 + x_3^2 = l_j^2 - h_j^2$ ($j = 0, \dots, k$)

$$\begin{aligned} \frac{\partial B_2^\alpha}{\partial x_3} - \frac{\partial B_3^\alpha}{\partial x_2} - \frac{\partial V}{\partial x_1} &= \frac{\partial}{\partial x_3}(-x_3 W^\alpha) - \frac{\partial}{\partial x_2}(x_2 W^\alpha) - \frac{\partial V}{\partial x_1} \\ &= -2W^\alpha - x_3 \frac{\partial W^\alpha}{\partial x_3} - x_2 \frac{\partial W^\alpha}{\partial x_2} - \frac{\partial V}{\partial x_1} \\ &= -2W^\alpha + \frac{1}{2}(x_2^2 + x_3^2) T^\alpha - \frac{\partial V}{\partial x_1} \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^{\alpha} \frac{2}{l_j (h_j + l_j)} - (x_2^2 + x_3^2) \frac{h_j + 2l_j}{l_j^3 (h_j + l_j)^2} - \frac{h_j}{l_j^3} \\ &\quad - \frac{1}{2} \sum_{j=\alpha+1}^k \frac{2}{l_j (h_j - l_j)} - (x_2^2 + x_3^2) \frac{h_j - 2l_j}{l_j^3 (h_j - l_j)^2} - \frac{h_j}{l_j^3} = 0 \\ \frac{\partial B_3^\alpha}{\partial x_1} - \frac{\partial V}{\partial x_2} &= \frac{\partial}{\partial x_1}(x_2 W^\alpha) - \frac{\partial V}{\partial x_2} = (x_2 - x_2) \left(-\frac{1}{2} \sum_{j=1}^k \frac{1}{l_j^3} \right) = 0 \\ \frac{\partial B_2^\alpha}{\partial x_1} + \frac{\partial V}{\partial x_3} &= \frac{\partial}{\partial x_1}(-x_3 W^\alpha) + \frac{\partial V}{\partial x_3} = (-x_3 + x_3) \left(-\frac{1}{2} \sum_{j=1}^k \frac{1}{l_j^3} \right) = 0 \end{aligned}$$

und (I),(II),(III) sind erfüllt.

2. $(I^\alpha, J^\alpha, K^\alpha, g^\alpha)$ sind global wohldefiniert:

In der lokalen Basis $\frac{\partial}{\partial \theta}, \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}$ von TU_α und $TU_{\alpha-1}$ ist das Differential $D\phi_{\alpha-1}^{-1}\phi_\alpha$ durch

$$D\phi_{\alpha-1}^{-1}\phi_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{x_3}{x_2^2 + x_3^2} & \frac{x_2}{x_2^2 + x_3^2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

gegeben. Damit und mit

$$\begin{aligned} B_2^\alpha(p) - B_2^{\alpha-1}(\phi_{\alpha-1}^{-1}\phi_\alpha(p)) &= -\frac{x_3}{x_2^2 + x_3^2} \\ B_3^\alpha(p) - B_3^{\alpha-1}(\phi_{\alpha-1}^{-1}\phi_\alpha(p)) &= \frac{x_2}{x_2^2 + x_3^2} \end{aligned}$$

können wir nun leicht prüfen, dass $(I^\alpha, J^\alpha, K^\alpha)$ mit der Metrik g^α eine globale Hyperkählerstruktur (I, J, K, g) definieren. \square

Weiterhin ist die folgende $S^1 \times S^1$ -Wirkung, die wir in der Karte U_α angeben, global wohldefiniert (vergleiche obige Kartenwechsel (3.6)):

$$\rho^\alpha(e^{i\gamma}, e^{i\delta})(x_1 i + jz, \theta) = (x_1 i + j e^{i(\delta-\gamma)} z, e^{i[\alpha(\delta-\gamma)+\gamma]\theta}) \quad (3.10)$$

Lemma 3.2.2. *Die durch (3.10) definierte $S^1 \times S^1$ -Wirkung ρ erfüllt die folgenden Eigenschaften bezüglich der Hyperkählerstruktur (I, J, K, g) :*

- a) ρ ist isometrisch.
- b) ρ kommutiert mit der komplexen Struktur I .
- c) ρ rotiert die J - K -Ebene der komplexen Strukturen in folgendem Sinne:

$$\begin{aligned} \rho(e^{i\gamma}, e^{i\delta})_* J \rho^{-1}(e^{i\gamma}, e^{i\delta})_* &= \cos(\gamma - \delta) J + \sin(\gamma - \delta) K \\ \rho(e^{i\gamma}, e^{i\delta})_* K \rho^{-1}(e^{i\gamma}, e^{i\delta})_* &= -\sin(\gamma - \delta) J + \cos(\gamma - \delta) K \end{aligned} \quad (3.11)$$

Beweis. Wir beobachten, dass l_α , h_α und damit auch V und W^α unter ρ invariant bleiben. Es ist aber

$$\begin{pmatrix} B_2^\alpha \\ B_3^\alpha \end{pmatrix} \Big|_{\rho(e^{i\gamma}, e^{i\delta})(p)} = \begin{pmatrix} \cos(\gamma - \delta) & -\sin(\gamma - \delta) \\ \sin(\gamma - \delta) & \cos(\gamma - \delta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_2^\alpha \\ B_3^\alpha \end{pmatrix} \Big|_p \quad (3.12)$$

Damit können wir nun verifizieren, dass

- a) $\rho^\alpha(e^{i\gamma}, e^{i\delta})_*^\dagger g^\alpha|_{\rho(e^{i\gamma}, e^{i\delta})(x, \theta)} \rho^\alpha(e^{i\gamma}, e^{i\delta})_* = g^\alpha|_{(x, \theta)}$
- b) $\rho^\alpha(e^{i\gamma}, e^{i\delta})_* I^\alpha|_{(x, \theta)} (\rho^\alpha)^{-1}(e^{i\gamma}, e^{i\delta})_* = I^\alpha|_{\rho(e^{i\gamma}, e^{i\delta})(x, \theta)}$
- c) $\rho^\alpha(e^{i\gamma}, e^{i\delta})_* J^\alpha|_{(x, \theta)} (\rho^\alpha)^{-1}(e^{i\gamma}, e^{i\delta})_*$
 $= \cos(\gamma - \delta) J^\alpha|_{\rho(e^{i\gamma}, e^{i\delta})(x, \theta)} + \sin(\gamma - \delta) K^\alpha|_{\rho(e^{i\gamma}, e^{i\delta})(x, \theta)}$

Die letzte Relation folgt zwingend hieraus. \square

Insbesondere wirkt die diagonale $S^1 \times S^1$ -Wirkung $e^{i\beta} \cdot p = \rho(e^{i\beta}, e^{i\beta})p$ also *hyperkählersch*. Diese Wirkung ist auch *Hamiltonsch*:

Lemma 3.2.3. *Wir betrachten den Gibbons-Hawking-Raum (X, I, J, K, g) mit den zugehörigen Kählerformen $\omega_l = g_{\mathbb{H}}(\cdot, I_l \cdot)$ und die Gruppenwirkung von S^1 , die auf X durch $(e^{i\beta}, p) \mapsto \rho(e^{i\beta}, e^{i\beta})p$ gegeben ist. Bezüglich der drei Kählerstrukturen existieren drei Momentenabbildungen $\mu_I, \mu_J, \mu_K: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{R} \cong (i\mathbb{R})^*$, so dass für*

$$\mu := \mu_I i + \mu_J j + \mu_K k = \sum_{l=1}^3 \mu_l i_l \quad \text{und} \quad (x, \theta) \in U_\alpha.$$

gilt

$$\mu(x, \theta) = -x. \quad (3.13)$$

Beweis. Wir bemerken zunächst, dass μ verträglich mit den Übergangsabbildungen (3.6) ist. Weiter folgt mit (3.9)

$$\begin{aligned} dx(v) &= dx_1(v)i + dx_2(v)j + dx_3(v)k \\ &= -\omega_I\left(\frac{\partial}{\partial\theta}, v\right)i - \omega_J\left(\frac{\partial}{\partial\theta}, v\right)j - \omega_K\left(\frac{\partial}{\partial\theta}, v\right)k \\ &= -\omega_I(K^i, v)i - \omega_J(K^i, v)j - \omega_K(K^i, v)k \\ &= -d\mu_I(v)i - d\mu_J(v)j - d\mu_K(v)k = -d\mu(v). \quad \square \end{aligned}$$

Notiz 3.2.4. Die Abbildung $\mu: X \rightarrow \text{Im}(\mathbb{H})$ ist regulär auf $X \setminus \mu^{-1}\{-y_1, \dots, -y_k\}$ und beschreibt $X \setminus \mu^{-1}\{-y_1, \dots, -y_k\} \rightarrow \mu(X) \setminus \{-y_1, \dots, -y_k\}$ als S^1 -Hauptfaserbündel. Tatsächlich ist μ eingeschränkt auf $S^3 \in V_\alpha$ ein *lokales Hopf-Bündel* $S^3 \rightarrow S^2$.

Weiterhin setzen wir wie im linearen Fall

$$\mu_{\mathbb{C}} := \mu_J + i\mu_K \quad (\text{so dass } \mu = \mu_I i + \mu_{\mathbb{C}} j). \quad (3.14)$$

Auch hier erfüllt $\mu_{\mathbb{C}}$, dass

$$\mu_{\mathbb{C}} \circ \rho(e^{i\gamma}, e^{i\delta}) = e^{i(\gamma-\delta)} \mu_{\mathbb{C}}, \quad (3.15)$$

während μ_I invariant unter ρ ist.

Notiz 3.2.5. Außerdem lässt sich leicht nachrechnen, dass $\mu_{\mathbb{C}}: (X, I) \rightarrow (\mathbb{C}, i)$ dann *holomorph* bezüglich der komplexen Struktur I ist.

Desweiteren machen wir später Gebrauch von den folgenden Eigenschaften der quaternionischen Kählerform ω :

Lemma 3.2.6. a) Die Kählerformen ω_J und ω_K eines Gibbons-Hawking-Raumes sind exakt. Genauer ist

$$\omega_J = d\gamma_J \quad \omega_K = d\gamma_K \quad \text{mit} \quad \gamma_J = \iota_{K_p^{(0,-i)}}(\omega_K) \quad \gamma_K = \iota_{K_p^{(0,i)}}(\omega_J).$$

Hierbei bezeichnet K_p^ξ das Fundamentalvektorfeld von $\xi \in i\mathbb{R} \oplus i\mathbb{R}$ bezüglich ρ .

b) Für die Fundamentalvektorfelder K^{it} der hyperkählerschen S^1 -Wirkung, die durch $(e^{i\beta}, p) \mapsto \rho(e^{i\beta}, e^{i\beta})p$ gegeben ist, gilt mit der Konvention (3.14)

$$\gamma(K^{it}) := \gamma_J(K^{it})j + \gamma_K(K^{it})k = -(t\mu_{\mathbb{C}})j.$$

c) Für die Fundamentalvektorfelder K^{it} der S^1 -Wirkung, welche durch $(\lambda, p) \mapsto \rho(1, \lambda^n)p$ gegeben ist, gilt

$$\gamma(K^{it}) = 0.$$

d) Die 1-Form $\gamma_{\mathbb{C}} := \gamma_J + i\gamma_K$ (so dass $\gamma = \gamma_{\mathbb{C}} j$) ist $\rho_{\gamma-\delta}$ -äquivariant.

Beweis. a) In die Berechnung folgender Lie-Ableitungen fließen die Relationen (3.11) ein sowie, dass ρ isometrisch auf X wirkt:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{K_\rho^{(0,-i)}}(\omega_K) &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \left(\rho(1, e^{-it})^* \omega_K \right) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} g \left(\rho(1, e^{-it})_* \cdot, K \rho(1, e^{-it})_* \cdot \right) \\ &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} g \left(\rho(1, e^{-it})_* \cdot, \rho(1, e^{-it})_* (-\sin(-t)J + \cos(-t)K) \cdot \right) \\ &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} g \left(\cdot, (\sin(t)J + \cos(t)K) \cdot \right) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (\sin(t)\omega_J + \cos(t)\omega_K) \\ &= \omega_J\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{K_\rho^{(0,i)}}(\omega_J) &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \left(\rho(1, e^{it})^* \omega_J \right) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} g \left(\rho(1, e^{it})_* \cdot, J \rho(1, e^{it})_* \cdot \right) \\ &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} g \left(\rho(1, e^{it})_* \cdot, \rho(1, e^{it})_* (\cos(t)J + \sin(t)K) \cdot \right) \\ &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} g \left(\cdot, (\cos(t)J + \sin(t)K) \cdot \right) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (\cos(t)\omega_J + \sin(t)\omega_K) \\ &= \omega_K\end{aligned}$$

Da ω_J und ω_K geschlossen sind, folgt hieraus schon die Exaktheit:

$$\begin{aligned}\omega_J &= \mathcal{L}_{K_\rho^{(0,-i)}}(\omega_K) = d \left(\iota_{K_\rho^{(0,-i)}} \omega_K \right) + \iota_{K_\rho^{(0,-i)}} d\omega_K = d \left(\iota_{K_\rho^{(0,-i)}} \omega_K \right) \\ \omega_K &= \mathcal{L}_{K_\rho^{(0,i)}}(\omega_J) = d \left(\iota_{K_\rho^{(0,i)}} \omega_J \right) + \iota_{K_\rho^{(0,i)}} d\omega_J = d \left(\iota_{K_\rho^{(0,i)}} \omega_J \right)\end{aligned}$$

b) Wir rechnen in der Karte U_α mit (3.9)

$$\begin{aligned}\gamma|_{(x,\theta)}(K^i) &= \gamma_J(K^i) j + \gamma_K(K^i) k = \omega_K \left(K_\rho^{(0,-i)}, K_\rho^{(i,i)} \right) j + \omega_J \left(K_\rho^{(0,i)}, K_\rho^{(i,i)} \right) k \\ &= \omega_K \left(- \left(\alpha \frac{\partial}{\partial \theta} + x_3 \frac{\partial}{\partial x_2} - x_2 \frac{\partial}{\partial x_3} \right), \frac{\partial}{\partial \theta} \right) j + \omega_J \left(\alpha \frac{\partial}{\partial \theta} + x_3 \frac{\partial}{\partial x_2} - x_2 \frac{\partial}{\partial x_3}, \frac{\partial}{\partial \theta} \right) k \\ &= x_2 \omega_K \left(\frac{\partial}{\partial x_3}, \frac{\partial}{\partial \theta} \right) j + x_3 \omega_J \left(\frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial \theta} \right) k = x_2 j + x_3 k = -\mu_{\mathbb{C}}(x, \theta) j\end{aligned}$$

c) Da $K_\rho^{(0,i)}$ und $K_\rho^{(0,ni)}$ an jedem Punkt linear abhängig sind, folgt:

$$\begin{aligned}\gamma(K^i) &= \gamma_J(K^i) j + \gamma_K(K^i) k \\ &= \omega_K \left(K_\rho^{(0,-i)}, K_\rho^{(0,ni)} \right) j + \omega_J \left(K_\rho^{(0,i)}, K_\rho^{(0,ni)} \right) k = 0\end{aligned}$$

d) Wir benötigen wiederum die Relationen (3.11) sowie, dass ρ isometrisch auf X wirkt. Außerdem geht in der folgenden Rechnung ein, dass $S^1 \times S^1$ abelsch ist.

Nach a) ist

$$\begin{aligned}
\rho(e^{i\gamma}, e^{i\delta})^*(\gamma_{\mathbb{C}}) &= \rho(e^{i\gamma}, e^{i\delta})^* \left(g \left(K_{\rho}^{(0,-i)}, K \cdot \right) + g \left(K_{\rho}^{(0,i)}, J \cdot \right) i \right) \\
&= g \left(K_{\rho}^{(0,-i)}, K \rho(e^{i\gamma}, e^{i\delta})_* \cdot \right) + g \left(K_{\rho}^{(0,i)}, J \rho(e^{i\gamma}, e^{i\delta})_* \cdot \right) i \\
&= g \left(K_{\rho}^{(0,-i)}, \rho(e^{-i\gamma}, e^{-i\delta})_* (\sin(\gamma - \delta)J + \cos(\gamma - \delta)K) \cdot \right) \\
&\quad + g \left(K_{\rho}^{(0,i)}, \rho(e^{-i\gamma}, e^{-i\delta})_* (\cos(\gamma - \delta)J - \sin(\gamma - \delta)K) \cdot \right) i \\
&= g \left(\rho(e^{i\gamma}, e^{i\delta})_* K_{\rho}^{(0,-i)}, (\sin(\gamma - \delta)J + \cos(\gamma - \delta)K) \cdot \right) \\
&\quad + g \left(\rho(e^{i\gamma}, e^{i\delta})_* K_{\rho}^{(0,i)}, (\cos(\gamma - \delta)J - \sin(\gamma - \delta)K) \cdot \right) i \\
&= g \left(K_{\rho}^{(0,-i)}, (\sin(\gamma - \delta)J + \cos(\gamma - \delta)K) \cdot \right) \\
&\quad + g \left(K_{\rho}^{(0,i)}, (\cos(\gamma - \delta)J - \sin(\gamma - \delta)K) \cdot \right) i \\
&= -\sin(\gamma - \delta)\gamma_K + \cos(\gamma - \delta)\gamma_J \\
&\quad + (\cos(\gamma - \delta)\gamma_K + \sin(\gamma - \delta)\gamma_J) i \\
&= (\cos(\gamma - \delta) + i \sin(\gamma - \delta)) (\gamma_J + i\gamma_K) \\
&= e^{i(\gamma - \delta)}(\gamma_{\mathbb{C}}). \quad \square
\end{aligned}$$

Definition 3.2.7. Sei (M, g_M, I_M) eine Kählermannigfaltigkeit mit $\text{Spin}^{\mathbb{C}}(4)$ -Struktur P_L und Q_L das zugehörige $S^1 \times S^1$ -Bündel aus (2.3). Für einen Gibbons-Hawking-Raum (X, g, I, J, K, ρ) definieren wir das *verallgemeinerte Spinorbündel*

$$W_{L,X} := Q_L \times_{\rho} X$$

3.2.2 Ein Beispiel von Eguchi und Hanson

Wir zeigen zunächst mittels Hyperkählerreduktion, dass $T^*\mathbb{C}\mathbb{P}^1$ (als Mannigfaltigkeit) eine Hyperkählerstruktur von \mathbb{H}^2 erbt.

Wir betrachten \mathbb{H}^2 als Hyperkählermannigfaltigkeit $(\mathbb{H}^2, g, I, J, K)$ mit der Standardmetrik auf $\mathbb{H}^2 \cong \mathbb{R}^8$ und den komplexen Strukturen I, J, K auf $T\mathbb{H}^2 = \underline{\mathbb{H}}^2_{\mathbb{H}^2}$ die durch die Rechtsmultiplikation mit $-i, -j, -k$ gegeben sind. Die Wirkung der Gruppe $S^1 \subset \text{Sp}(2)$ durch Linksmultiplikation auf \mathbb{H}^2 erhält die Hyperkählerstruktur und ist Hamiltonsch bezüglich jeder der drei komplexen Strukturen $\omega_I = g(I \cdot, \cdot)$, $\omega_J = g(J \cdot, \cdot)$, $\omega_K = g(K \cdot, \cdot)$. Die entsprechenden Momentenabbildungen $\nu_I, \nu_J, \nu_K: \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{R} \cong (\mathfrak{s}^1)^*$ sind für $h_1, h_2 \in \mathbb{H}^2$ gegeben durch

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \left(\overline{h_1} i h_1 + \overline{h_2} i h_2 \right) &= \nu_I(h_1, h_2) i + (-i) \underbrace{\left(\nu_J(h_1, h_2) + i \nu_K(h_1, h_2) \right)}_{=: \nu_{\mathbb{C}}(h_1, h_2)} j =: \nu(h_1, h_2).
\end{aligned} \tag{3.16}$$

Für den regulären Wert $-\frac{i}{2}$ von ν betrachten wir nun $M_{-\frac{i}{2}} := \nu^{-1}(-\frac{i}{2})/S^1$ und zeigen, dass $M_{-\frac{i}{2}} = T^*\mathbb{C}\mathbb{P}^1$ als Mannigfaltigkeit. Dazu identifizieren wir $\mathbb{H}^2 = \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2$ mit der Notation $h_1 = z_1 + w_1j$ und $h_2 = z_2 + w_2j$. Die Momentenabbildungen sind dann mit $z = (z_1, z_2)$ und $w = (w_1, w_2)$ durch

$$\nu_I(z, w) = -\frac{1}{2}(|w|^2 - |z|^2) \quad (-i)\nu_{\mathbb{C}}(z, w) = \langle w, z \rangle_{\mathbb{C}^2}$$

gegeben, wobei $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{C}^2}$ das (im zweiten Argument konjugiert lineare) Hermitesche Standardprodukt auf \mathbb{C}^2 bezeichnet. Es ist

$$\begin{aligned} \nu^{-1}\left(-\frac{i}{2}\right) &= \nu_{\mathbb{C}}^{-1}(0) \cap \nu_I^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) \\ &= \left\{ (z, w) \in \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 \mid \langle w, z \rangle_{\mathbb{C}^2} = 0, |w|^2 = 1 + |z|^2 \right\}. \end{aligned}$$

Sei weiter

$$N := \left\{ (z, w) \in \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 \mid \langle w, z \rangle_{\mathbb{C}^2} = 0, w \neq 0 \right\}.$$

Natürlich gilt dann $\nu^{-1}(-\frac{i}{2}) \subset N \subset \nu_{\mathbb{C}}^{-1}(0)$. Die Menge N ist eine offene Umgebung von $\nu^{-1}(-\frac{i}{2})$ in $\nu_{\mathbb{C}}^{-1}(0)$. Auch N ist unter der S^1 -Wirkung invariant und sogar $\mathbb{C}^* = S^1 \times \mathbb{R}^+$ -invariant. Ferner gibt es für jedes $(z, w) \in N$ ein eindeutiges positives $r \in \mathbb{R}^+$, so dass $(r^{-1}z, rw) \in \nu^{-1}(-\frac{i}{2})$. Tatsächlich ist also

$$M_{-\frac{i}{2}} = \nu^{-1}\left(-\frac{i}{2}\right)/S^1 = N/\mathbb{C}^*$$

bezüglich der \mathbb{C}^* -Wirkung $\lambda \cdot (z, w) = ((\bar{\lambda})^{-1}z, \lambda w)$ auf N . Wir erhalten

$$M_{-\frac{i}{2}} = N/\mathbb{C}^* = \left\{ (z, w) \in w^\perp \times \mathbb{C}^2 \mid w \neq 0 \right\}/\mathbb{C}^* = T^*\mathbb{C}\mathbb{P}^1.$$

Damit können wir $T^*\mathbb{C}\mathbb{P}^1$ als Hyperkählerreduktion von \mathbb{H}^2 betrachten (vergleiche Satz 1.3.5). Die Hyperkählerstruktur auf \mathbb{H}^2 induziert eine Hyperkählerstruktur auf $T^*\mathbb{C}\mathbb{P}^1$.

Bemerkung. [1] Die so erhaltene Metrik auf $T^*\mathbb{C}\mathbb{P}^1$ heißt auch *Calabi-Metrik*. Auf gleiche Weise ergeben sich die Calabi-Metriken für $T^*\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ durch Hyperkählerreduktion von \mathbb{H}^{n+1} .

Bemerkung. Da $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$ komplex eindimensional ist, stimmt die erste Chernzahl $c_1(\mathbb{C}\mathbb{P}^1)$ mit der Eulercharakteristik $\chi(\mathbb{C}\mathbb{P}^1) = 2$ überein. Also ist $T^*\mathbb{C}\mathbb{P}^1 = \mathcal{O}_{\mathbb{C}\mathbb{P}^1}(-2)$. Das heißt, wir können $T^*\mathbb{C}\mathbb{P}^1$ in der affinen Standardüberdeckung wie folgt trivialisieren:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}_{\mathbb{C}} & \xleftarrow{x \mapsto v_1^2 x} & \mathbb{C}_{\mathbb{C}} \\ & \xrightarrow{u_2^2 y \leftarrow y} & \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{C} & \xleftarrow{u \neq 0} & \mathbb{C}\mathbb{P}^1 & \xrightarrow{v \neq 0} & \mathbb{C} \\ & \xrightarrow{v_1 := \frac{v}{u} \leftarrow [u : v]} & & \xrightarrow{[u : v] \mapsto \frac{u}{v} =: u_2} & \end{array}$$

Eine solche Trivialisierung können wir für die obige Beschreibung von $T^*\mathbb{C}\mathbb{P}^1$ explizit angeben. Wir bilden $[z, w] \in N/\mathbb{C}^*$ wie folgt ab:

$$\begin{aligned} N/\mathbb{C}^* \supset \{w_1 \neq 0\} \ni [z, w] &\longmapsto \left(\frac{w_2}{w_1}, \frac{w_1^2}{|w|^2} \left\langle \begin{pmatrix} \overline{w_2} \\ -\overline{w_1} \end{pmatrix}, z \right\rangle_{\mathbb{C}^2} \right) = (v_1, x) \\ N/\mathbb{C}^* \supset \{w_2 \neq 0\} \ni [z, w] &\longmapsto \left(\frac{w_1}{w_2}, \frac{w_2^2}{|w|^2} \left\langle \begin{pmatrix} \overline{w_2} \\ -\overline{w_1} \end{pmatrix}, z \right\rangle_{\mathbb{C}^2} \right) = (u_2, y) \end{aligned}$$

Die Trivialisierung ist wohldefiniert und erfüllt die Übergangsbedingungen aus dem vorhergehenden Diagramm.

Um nun $T^*\mathbb{C}\mathbb{P}^1$ die Struktur eines Gibbons-Hawking-Raumes zu verleihen, benötigen wir weiterhin eine $S^1 \times S^1$ -Wirkung ρ auf $T^*\mathbb{C}\mathbb{P}^1$, die sich im Sinne von (3.11) mit der Hyperkähler-Struktur verträgt. Wir nutzen wieder unsere Beschreibung von $T^*\mathbb{C}\mathbb{P}^1$ als Hyperkählerreduktion von \mathbb{H}^2 und betrachten auf \mathbb{H}^2 die $S^1 \times S^1$ -Wirkung $\hat{\rho}$, die wir bezüglich der Koordinaten z_1, w_1, z_2, w_2 (in dieser Reihenfolge) mit der Matrixmultiplikation mit

$$\left(\begin{array}{cc|cc} e^{i(\delta-\gamma)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & e^{i\delta} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{i\gamma} \end{array} \right)$$

für $(e^{i\gamma}, e^{i\delta}) \in S^1 \times S^1$ angeben. Die Wirkung von $\hat{\rho}$ ist isometrisch und die Relationen (3.11) sind für $\hat{\rho}$ leicht zu verifizieren. Die diagonale S^1 -Wirkung $e^{i\gamma} \cdot = \hat{\rho}(e^{i\gamma}, e^{i\gamma})$ ist dann durch $e^{i\gamma} \cdot (h_1, h_2) = (h_1, e^{i\gamma} h_2)$ gegeben. Analog zu (3.16) ist diese diagonale S^1 -Wirkung Hamiltonsch mit den Momentenabbildungen $\hat{\mu}_I, \hat{\mu}_J, \hat{\mu}_K$, die wir durch

$$\frac{1}{2} (\overline{h_2} i h_2) = \hat{\mu}_I(h_1, h_2) i + (-i) (\hat{\mu}_J(h_1, h_2) + i \hat{\mu}_K(h_1, h_2)) j$$

beschreiben bzw. in den Koordinaten $h_1 = z_1 + w_1 j$ und $h_2 = z_2 + w_2 j$ durch

$$\hat{\mu}_I(z, w) = -\frac{1}{2} (|w_2|^2 - |z_2|^2) \quad (-i) \hat{\mu}_C(z, w) = w_2 \overline{z_2}$$

angeben. Da $\nu_I^{-1}(-\frac{i}{2})$ unter dieser $S^1 \times S^1$ -Wirkung $\hat{\rho}$ invariant bleibt und $\hat{\rho}$ mit der für die Hyperkählerreduktion genutzte S^1 -Wirkung kommutiert, induziert $\hat{\rho}$ auf diese Weise eine isometrische $S^1 \times S^1$ -Wirkung ρ auf $T^*\mathbb{C}\mathbb{P}^1$, die ebenfalls die Relationen (3.11) erfüllt und deren diagonale S^1 -Wirkung mit den Momentenabbildungen

$$\mu_I[z, w] = -\frac{1}{2} (|w_2|^2 - |z_2|^2) \quad (-i) \mu_C[z, w] = w_2 \overline{z_2}$$

Hamiltonsch ist.

Desweiteren hat diese diagonale S^1 -Wirkung auf $T^*\mathbb{C}\mathbb{P}^1$ genau zwei Fixpunkte, nämlich $[z_1, z_2, w_1, w_2] = [0, 0, 1, 0] =: F_1$ sowie $[z_1, z_2, w_1, w_2] = [0, 0, 0, 1] =: F_2$ – Nord- und Südpol von $\mathbb{C}\mathbb{P}^1 \subset T^*\mathbb{C}\mathbb{P}^1$. Außerhalb dieser beiden Fixpunkte beschreiben die zugehörigen Momentenabbildungen

$$T^*\mathbb{C}\mathbb{P}^1 - \{F_1, F_2\} \xrightarrow{(\mu_I, \mu_J, \mu_K)} \mathbb{R}^3 - \left\{ \left(-\frac{1}{2}, 0, 0 \right), (0, 0, 0) \right\}$$

als S^1 -Hauptfaserbündel. Abschließend bemerken wir noch, dass $\mu_{\mathbb{C}}^{-1}(0) \subset T^*\mathbb{C}\mathbb{P}^1$ sich gerade aus der Vereinigung $T_{F_1}^*\mathbb{C}\mathbb{P}^1 \cup \mathbb{C}\mathbb{P}^1 \cup T_{F_2}^*\mathbb{C}\mathbb{P}^1$ zusammensetzt.

Bemerkung. Wir bezeichnen $T^*\mathbb{C}\mathbb{P}^1$ mit dieser Struktur auch als *Eguchi-Hanson gravitational instanton*. Eguchi und Hanson geben in [3] einen expliziten Ausdruck für die Metrik an. Es ist das einfachste Beispiel für einen Gibbons-Hawking-Raum, der kein Vektorraum ist. In der Literatur finden wir dieses Beispiel auch als *2-center gravitational (multi-) instanton* wieder [7].

3.3 Ein nicht-linearer Dirac-Operator

3.3.1 Verallgemeinerung der kovarianten Ableitung

Es sei $\psi \in \Gamma(M, W_{L,X})$ ein (verallgemeinerter) Spinor und $f_\psi \in C^\infty(Q_L, X)^\rho$ die dazugehörige antiäquivariante Funktion sowie C eine Zusammenhangs-1-form $C \in \Omega^1(Q_L, i\mathbb{R} \oplus i\mathbb{R})$ auf Q_L . Für den linearen Fall $X = \mathbb{H}$ ist $\rho = \rho_\gamma \oplus \rho_\delta$ eine Darstellung auf $\mathbb{H} \cong \mathbb{C}^2$ und wir erhalten

$$\begin{aligned} f_{\nabla^C \psi} \Big|_q (t) &= df_\psi \Big|_q (t) + (\widehat{\rho}(C(t))) (f_\psi(q)) \\ &= df_\psi \Big|_q (t) + K_\rho^{C(t)} \Big|_{f_\psi(q)} \end{aligned}$$

Dabei bezeichnet $K_\rho^{C(t)} \Big|_{f_\psi(q)}$ das Fundamentalvektorfeld von $C(t)$ bezüglich der $S^1 \times S^1$ -Wirkung $\rho_\gamma \oplus \rho_\delta = \rho$ auf $\mathbb{H} = X$. Deshalb definieren wir im allgemeinen Gibbons-Hawking-Fall die 1-Form $f_{\nabla^C \psi} \in \Omega^1(Q_L, TX)$ für verallgemeinerte Spinoren ψ durch

$$f_{\nabla^C \psi} \Big|_q (t) := df_\psi \Big|_q (t) + K_\rho^{C(t)} \Big|_{f_\psi(q)} \in T_{f_\psi(q)} X \quad \text{für } q \in Q_L \text{ und } t \in T_q Q_L. \quad (3.17)$$

In der Tat gilt auch hier

Lemma 3.3.1. *Für einen verallgemeinerten Spinor ψ und einen Zusammenhang C auf Q_L ist $f_{\nabla^C \psi} \in \Omega_{horiz}^1(Q_L, TX)^\rho$.*

Beweis. Die in (3.17) definierte 1-Form $f_{\nabla^C \psi}$ erfüllt die folgenden Eigenschaften:

- (Antiäquivarianz) Wir benutzen hier, dass f_ψ antiäquivariant ist und dass $S^1 \times S^1$ abelsch ist:

$$\begin{aligned}
& f_{\nabla^C \psi} \Big|_{q \cdot (e^{i\gamma}, e^{i\delta})} \left(DR_{(e^{i\gamma}, e^{i\delta})} t \right) \\
&= df_\psi \Big|_{q \cdot (e^{i\gamma}, e^{i\delta})} \left(DR_{(e^{i\gamma}, e^{i\delta})} t \right) + K^{C(DR_{(e^{i\gamma}, e^{i\delta})} t)} \Big|_{f_\psi(q \cdot (e^{i\gamma}, e^{i\delta}))} \\
&= \rho(e^{-i\gamma}, e^{-i\delta})_* df_\psi \Big|_{q \cdot (e^{i\gamma}, e^{i\delta})} (t) + K^{C(t)} \Big|_{\rho(e^{-i\gamma}, e^{-i\delta}) f_\psi(q)} \\
&= \rho(e^{-i\gamma}, e^{-i\delta})_* \left(df_\psi \Big|_{q \cdot (e^{i\gamma}, e^{i\delta})} (t) + K^{C(t)} \Big|_{f_\psi(q)} \right) \\
&= \rho(e^{-i\gamma}, e^{-i\delta})_* \left(f_{\nabla^C \psi} \Big|_q (t) \right)
\end{aligned}$$

- Wie im linearen Fall verschwindet $f_{\nabla^C \psi}$ auf Fundamentalvektorfeldern K^ξ (der $S^1 \times S^1$ -Wirkung auf Q_L), da f_ψ antiäquivariant ist:

$$f_{\nabla^C \psi} \Big|_q (K^\xi) = df_\psi \Big|_q (K^\xi) + K^{C(K^\xi)} \Big|_{f_\psi(q)} = K^{-\xi} \Big|_{f_\psi(q)} + K^\xi \Big|_{f_\psi(q)} = 0$$

□

Für einen verallgemeinerten Spinor ψ können wir das Pullbackbündel $f_\psi^* TX$ über Q_L durch Herausteilen der $S^1 \times S^1$ -Wirkung ρ zu einem Vektorbündel über M herunterdrücken, d. h. wir identifizieren $(q(e^{i\gamma}, e^{i\delta}), t) \sim (q, \rho(e^{i\gamma}, e^{i\delta})_* t)$. Wir notieren dieses Vektorbündel mit

$$\pi_1 \psi^*(TX) := f_\psi^* TX / (S^1 \times S^1, \rho_*). \quad (3.18)$$

Für homotope Abbildungen f_ψ erhalten wir hier isomorphe Vektorbündel.

Definition 3.3.2. In der obigen Notation definieren wir die *verallgemeinerte kovariante Ableitung* $\nabla^C \psi$ eines verallgemeinerten Spinors ψ durch

$$\begin{aligned}
\nabla^C : \psi \in \Gamma(W_{L,X}) &\longrightarrow \Gamma(T^* M \otimes \pi_1 \psi^*(TX)) \\
\nabla^C \psi \Big|_m (t) &:= \left[q, f_{\nabla^C \psi} \Big|_q (\tilde{t}) \right]_\rho \in \pi_1 \psi^*(TX) \\
&\text{für } m \in M \text{ und } t \in T_m M.
\end{aligned}$$

Dabei wählen wir irgendein $q \in Q_L$ über $m \in M$ und meinen mit $\tilde{t} \in T_q Q_L$ den horizontalen Lift von t bezüglich C .

Die obigen Eigenschaften von $f_{\nabla^C \psi}$ sichern die Wohldefiniertheit dieser Definition. Für einen Spinor $\psi \in \Gamma(M, W_{L,X})$ erhalten wir das folgende kommutierende Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} \Gamma(W_{L,X}) \ni \psi & \xrightarrow{\quad} & f_\psi \in C^\infty(Q_L, X)^\rho \\ \nabla^C \downarrow & & \downarrow d+K^C \\ \Gamma(T^*M \otimes \pi_! \psi^*(TX)) \ni \nabla^C \psi & \xrightarrow{\quad} & f_{\nabla^C \psi} \in \Omega_{horiz}^1(Q_L, TX)^\rho \end{array}$$

Wir verallgemeinern die Notation (3.18) noch für die folgende Situation: Sei $E \rightarrow X$ ein Vektorbündel über dem Gibbons-Hawking-Raum X und sei w eine glatte $S^1 \times S^1$ -Wirkung auf E , so dass $w(e^{i\gamma}, e^{i\delta})|_{E_x} : E_x \xrightarrow{\sim} E_{\rho(e^{i\gamma}, e^{i\delta})x}$ für alle $x \in X$ ein Isomorphismus ist. Es gelte außerdem $w(g_1)w(g_2) = w(g_1g_2)$ für $g_i \in S^1 \times S^1$. Dann setzen wir

$$\pi_! \psi^*(E, w) := f_\psi^* E / (S^1 \times S^1, w). \quad (3.19)$$

Wenn klar ist, welche Wirkung wir mit w meinen, lassen wir es in der Notation aus.

Notiz 3.3.3. Im Fall $X = \mathbb{H}$ stimmt die Definition 3.3.2 mit der normalen kovarianten Ableitung überein. Insbesondere ist dann

$$\begin{aligned} \pi_! \psi^*(TX) &= f_\psi^*(\underline{\mathbb{H}}_{\mathbb{H}}) / (S^1 \times S^1, (\rho_\gamma \oplus \rho_\delta)_*) \\ &= \underline{\mathbb{H}}_{Q_L} / (S^1 \times S^1, \rho_\gamma \oplus \rho_\delta) = Q_L \times_{\rho_\gamma \oplus \rho_\delta} \mathbb{H} = W_L^+ \end{aligned} \quad (3.20)$$

unabhängig von $\psi \in \Gamma(M, W_L^+)$, da hier $\rho_\gamma \oplus \rho_\delta$ linear ist.

3.3.2 Verallgemeinerung der Clifford-Multiplikation

Um die Clifford-Multiplikation zu verallgemeinern, brauchen wir ein paar Vorbereitungen: Sei zunächst V ein reeller Vektorraum mit komplexen Strukturen I und J (also $I^2 = J^2 = -1$), so dass $IJ = -JI$. Wir betrachten die Zerlegung

$$V_{\mathbb{C}} := V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = V_I^{1,0} \oplus V_I^{0,1}$$

in die Eigenräume zu $\pm i$ bezüglich I . Durch den Automorphismus J erhalten wir die folgenden *komplex linearen* Isomorphismen

$$\begin{aligned} (V_I^{1,0}, i) &\xrightleftharpoons[-J]{J} (V_I^{0,1}, i) & \pi^{1,0}: (V, I) &\longrightarrow (V_I^{1,0}, i) \\ & & J \circ \pi^{1,0}: (V, I) &\longrightarrow (V_I^{0,1}, i) \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned} V_{\mathbb{C}} = V_I^{1,0} \oplus V_I^{0,1} &\cong (V, I) \oplus (V, I) \cong (V, I) \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}^2 \\ &\cong (V, I) \otimes_{\mathbb{C}} (\mathbb{C} + j\mathbb{C}) = (V, I) \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{H} \end{aligned} \quad (3.21)$$

Das Tensorprodukt $(V, I) \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{H}$ ist so zu verstehen, dass $Iv \otimes h = v \otimes hi$. Wir nutzen die komplexe Struktur $I \otimes \mathbf{1}_{\mathbb{H}} = \mathbf{1}_V \otimes R_i$. Konkret ist die Zeile (3.21) für $v_1, v_2 \in V$ gegeben durch:

$$\begin{aligned} v_1 \otimes e_1 + v_2 \otimes e_2 &\longleftarrow v_1 \otimes 1 + v_2 \otimes j \\ \pi^{1,0}(v_1) + J\pi^{1,0}(v_2) &\longleftarrow \pi^{1,0}(v_1) \oplus J\pi^{1,0}(v_2) \longleftarrow v_1 \oplus v_2 \longleftarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_1 + iv_2 &\longmapsto \pi^{1,0}(v_1 + iv_2) \oplus \pi^{0,1}(v_1 + iv_2) \longmapsto v_1 + Iv_2 \oplus -J(v_1 - Iv_2) \\ &\longmapsto (v_1 + Iv_2) \otimes e_1 - J(v_1 - Iv_2) \otimes e_2 \longmapsto (v_1 + Iv_2) \otimes 1 - J(v_1 - Iv_2) \otimes j \end{aligned}$$

Zusammengefasst erhalten wir den komplex linearen Isomorphismus

$$\begin{aligned} \Phi: V_{\mathbb{C}} = V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} &\longrightarrow (V, I) \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{H} \\ v \otimes z &\longmapsto v \otimes z - Jv \otimes jz \\ \pi^{1,0}(v_1) + J\pi^{1,0}(v_2) &\longleftarrow v_1 \otimes 1 + v_2 \otimes j. \end{aligned}$$

Beobachtung 3.3.4. (Realteil) Der Realteil auf $V_{\mathbb{C}}$, den wir durch die Konjugation auf \mathbb{C} erhalten, übersetzt sich durch Φ wie folgt:

$$\begin{array}{ccc} V_{\mathbb{C}} & \xrightarrow{\Phi} & (V, I) \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{H} \\ v \otimes z \longmapsto v \otimes \bar{z} \downarrow & & \downarrow v \otimes h \longmapsto Jv \otimes h(-j) =: \text{Konj}(v \otimes h) \\ V_{\mathbb{C}} & \xrightarrow{\Phi} & (V, I) \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{H} \end{array}$$

Wohldefiniertheit der rechten Seite und die Kommutativität des Diagramms sind leicht nachzurechnen. Demzufolge definieren wir auf $(V, I) \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{H}$ den Realteil durch

$$\text{Real}(v \otimes h) := \frac{1}{2} (v \otimes h - Jv \otimes hj). \quad (3.22)$$

Beobachtung 3.3.5. ($S^1 \times S^1$ -Darstellung) Sei $\varrho: S^1 \times S^1 \rightarrow V$ eine Darstellung, die sich mit $(I, J, K = IJ)$ wie in (3.11) verträgt. Dann gilt für die komplex lineare Fortsetzung auf $V_{\mathbb{C}}$

$$\begin{aligned} \Phi \varrho(e^{i\gamma}, e^{i\delta}) \Phi^{-1}(v_1 \otimes 1 + v_2 \otimes j) &= \Phi \varrho(e^{i\gamma}, e^{i\delta}) \left(\pi^{1,0}(v_1) + J\pi^{1,0}(v_2) \right) \\ &= \Phi \left(\varrho(e^{i\gamma}, e^{i\delta}) \pi^{1,0}(v_1) + [\cos(\gamma - \delta)J + \sin(\gamma - \delta)K] \varrho(e^{i\gamma}, e^{i\delta}) \pi^{1,0}(v_2) \right) \\ &= \Phi \left(\pi^{1,0}(\varrho(e^{i\gamma}, e^{i\delta})v_1) + J[\cos(\gamma - \delta) - \sin(\gamma - \delta)I] \pi^{1,0}(\varrho(e^{i\gamma}, e^{i\delta})v_2) \right) \\ &= \varrho(e^{i\gamma}, e^{i\delta})v_1 \otimes 1 + [\cos(\gamma - \delta) - \sin(\gamma - \delta)I] \varrho(e^{i\gamma}, e^{i\delta})v_2 \otimes j \\ &= \varrho(e^{i\gamma}, e^{i\delta})v_1 \otimes 1 + \varrho(e^{i\gamma}, e^{i\delta})v_2 \otimes j e^{i(\delta - \gamma)}. \end{aligned}$$

Sie induziert also auf $(V, I) \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{H}$ die Darstellung

$$(V_{\mathbb{C}}, \varrho_{\mathbb{C}}) \stackrel{\Phi}{\cong} ((V, I) \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{H}, \varrho \otimes (1 \oplus \rho_{\delta-\gamma})). \quad (3.23)$$

Da die Darstellung auf $V_{\mathbb{C}}$ komplex linear fortgesetzt ist, ist sie auch verträglich mit der Konjugation auf $(V, I) \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{H}$ im Sinne von Beobachtung 3.3.4.

Beobachtung 3.3.6. (Fall $V = \mathbb{H}$) Betrachten wir den Spezialfall

$$V = \mathbb{H}, \quad I = L_i, \quad J = L_j.$$

Dann gilt für $v \otimes h \in (V, I) \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{H}$, $e^{i\varphi} \in S^1$ und $q \in \text{Sp}(1)$, dass

$$\begin{aligned} e^{i\varphi} v \otimes h &= v \otimes h e^{i\varphi} \\ \Phi((R_q)_{\mathbb{C}}) \Phi^{-1}(v \otimes h) &= v q \otimes h \\ \Phi((L_q)_{\mathbb{C}}) \Phi^{-1}(v \otimes h) &= v \otimes q h. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Letzteres zeigt eine einfache, aber längere Rechnung. (Zur Erinnerung: Mit R_q und L_q sind Rechts- bzw. Linksmultiplikation mit q gemeint.) Schließlich folgt daraus, dass sich die auf $V_{\mathbb{C}}$ komplex linear fortgesetzten Darstellungen

$$\begin{aligned} \rho_{S^1} \oplus \rho_{S^1} \cdot \det: \text{U}(2) \times S^1 &\longrightarrow \text{U}(2) & ([\lambda, q], u) &\longmapsto (h \mapsto \bar{\lambda} h \lambda u) \\ \rho_{S^1} \cdot \rho_{stand}: \text{U}(2) \times S^1 &\longrightarrow \text{U}(2) & ([\lambda, q], u) &\longmapsto (h \mapsto q h \lambda u) \end{aligned}$$

unter Φ wie folgt übersetzen (vergleiche hierzu auch den Anhang A.1):

$$(V_{\mathbb{C}}, (\rho_{S^1} \oplus \rho_{S^1} \cdot \det)_{\mathbb{C}}) \stackrel{\Phi}{\cong} ((V, I) \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{H}, (\rho_{S^1} \oplus \rho_{S^1} \cdot \det) \otimes (1 \oplus \det)) \quad (3.25)$$

$$(V_{\mathbb{C}}, \rho_{S^1} \cdot (\rho_{stand})_{\mathbb{C}}) \stackrel{\Phi}{\cong} ((V, I) \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{H}, (\rho_{S^1} \oplus \rho_{S^1} \cdot \det) \otimes \rho_{stand}) \quad (3.26)$$

Exemplarisch verifizieren wir hier (3.26) unter Verwendung von (3.24):

$$\begin{aligned} \Phi(\rho_{S^1} \cdot \rho_{stand})([\lambda, q], u) \Phi^{-1}(v \otimes h) &= \Phi\left(q \Phi^{-1}(v \otimes h) \lambda u\right) \\ &= v \lambda u \otimes q h \\ &= \bar{\lambda} v \lambda u \otimes q h \lambda \\ &= (\rho_{S^1} \oplus \rho_{S^1} \cdot \det)([\lambda, q], u) v \otimes \rho_{stand}([\lambda, q], u) h \end{aligned}$$

(Für (3.25) ersetze in der Rechnung q durch $\bar{\lambda}$.) Da die Darstellungen auf $V_{\mathbb{C}}$ komplex linear fortgesetzt sind, sind sie auch verträglich mit der Konjugation auf $(V, I) \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{H}$ im Sinne von Beobachtung 3.3.4.

Bemerkung. (3.25) ist auch eine Konsequenz aus (3.23).

Weiterhin übersetzt sich die komplex lineare Fortsetzung des Homomorphismus von $U(2) \times S^1$ -Darstellungen aus (2.11) durch Φ in dieser Weise (vergleiche auch (2.12) und die Übersicht aus Anhang A.1):

$$\begin{array}{ccc}
 (\mathbb{R}^4, s) \otimes (V_{\mathbb{C}}, (\rho_{S^1} \oplus \rho_{S^1} \cdot \det)_{\mathbb{C}}) & \xrightarrow{\sim} & (\mathbb{R}^4, s) \otimes ((V, I) \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{H}, (\rho_{S^1} \oplus \rho_{S^1} \cdot \det) \otimes (1 \oplus \det)) \\
 \downarrow c \otimes 1 & & \downarrow \text{id} \otimes c \\
 (V_{\mathbb{C}}, \rho_{S^1} \cdot (\rho_{stand})_{\mathbb{C}}) & \xrightarrow{\sim} & ((V, I) \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{H}, (\rho_{S^1} \oplus \rho_{S^1} \cdot \det) \otimes \rho_{stand})
 \end{array}$$

Im Wesentlichen nutzen wir hier nur die Eigenschaft (3.24). Auch diese Operation ist mit der jeweiligen Konjugation verträglich.

Wir wenden nun Beobachtung 3.3.5 für V und ϱ auf TX und ρ_* an. Unter Berücksichtigung der Faserverschiebung folgt mit (3.3)

$$\begin{aligned}
 \pi_! \psi^*(TX_{\mathbb{C}}) &= \pi_! \psi^*(TX) \otimes \pi_! \psi^*(\underline{\mathbb{H}}_X, 1 \oplus \rho_{\delta-\gamma}) \\
 &= \pi_! \psi^*(TX) \otimes \underline{\mathbb{H}}_{Q_L} / (S^1 \times S^1, 1 \oplus \rho_{\delta-\gamma}) \\
 &= \pi_! \psi^*(TX) \otimes Q_L \times_{1 \oplus \rho_{\delta-\gamma}} \mathbb{H} = \pi_! \psi^*(TX) \otimes Q_L \times_{1 \oplus \rho_{\delta-\gamma}} \mathbb{C}^2 \\
 &= \pi_! \psi^*(TX) \otimes (\underline{\mathbb{C}}_M \oplus K_M^{-1}) \\
 &= \pi_! \psi^*(TX) \otimes W_{can}^+.
 \end{aligned} \tag{3.27}$$

Diese Zerlegung deutet darauf hin, dass wir eine Verallgemeinerung der Clifford-Multiplikation auf $\pi_! \psi^*(TX)$ definieren können, indem wir sie auf die bekannte Clifford-Multiplikation auf dem Faktor W_{can}^+ zurückführen und dann in geeigneter Weise einen Realteil bilden. Prüfen wir also zunächst, wie sich diese Zerlegung auf den klassischen Fall $X = \mathbb{H}$ auswirkt.

Wir haben bereits gesehen, dass dann $\pi_! \psi^*(TX) = W_L^+$ (Notiz 3.3.3). Für unsere Zwecke ist es nun günstig mit den Bündeln W_L^+ , W_L^- , W_{can}^+ , W_{can}^- als assoziierte Bündel von $P_{U(2)} \times L$ zu arbeiten (vergleiche den Anhang A.1 für die benötigten Darstellungen). Wir entnehmen (3.25) und (3.26), dass Φ die Bündelisomorphismen

$$W_L^+ \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \xrightarrow{\sim} (W_L^+, I) \otimes_{\mathbb{C}} W_{can}^+ \tag{3.28}$$

$$W_L^- \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \xrightarrow{\sim} (W_L^+, I) \otimes_{\mathbb{C}} W_{can}^- \tag{3.29}$$

induziert. Insbesondere stimmt (3.28) mit dem Isomorphismus (3.27) überein. Da die jeweilige Konjugation in der Faser mit den entsprechenden Darstellungen kommutiert, haben wir auf allen Bündeln eine wohldefinierte Konjugation, mit der die Isomorphismen (3.28) und (3.29) verträglich sind. Schließlich liefert das Diagramm aus Beobachtung 3.3.6 für $t \in \Gamma(TM)$ das folgende kommutierende Diagramm (c bezeichnet die Clifford-Multiplikation):

$$\begin{array}{ccccc}
& & W_L^+ & \xleftarrow{\sim} & [(W_L^+, I) \otimes_{\mathbb{C}} W_{can}^+]_r \\
& \nearrow \text{Re} & \downarrow & & \swarrow \text{Real} \\
W_L^+ \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} & \xleftarrow{\sim} & (W_L^+, I) \otimes_{\mathbb{C}} W_{can}^+ & & \downarrow \text{id} \otimes c(t) \\
& \downarrow c(t) \otimes 1 & \downarrow c(t) & \text{id} \otimes c(t) & \downarrow \\
& & W_L^- & \xleftarrow{\sim} & [(W_L^+, I) \otimes_{\mathbb{C}} W_{can}^-]_r \\
& \nearrow \text{Re} & \downarrow & & \swarrow \text{Real} \\
W_L^- \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} & \xleftarrow{\sim} & (W_L^+, I) \otimes_{\mathbb{C}} W_{can}^- & & \downarrow \\
& & & & \downarrow \\
& & & & W_L^- \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}
\end{array}$$

Im verallgemeinerten Fall (wenn X irgendein Gibbons-Hawking-Raum ist) können wir leicht prüfen, dass der folgende Teil des Diagramms erhalten bleibt:

$$\begin{array}{ccccc}
& & \pi_! \psi^*(TX) & \xleftarrow{\sim} & [\pi_! \psi^*(TX, I) \otimes W_{can}^+]_r \\
& \nearrow \text{Re} & \downarrow & & \swarrow \text{Real} \\
\pi_! \psi^*(TX_{\mathbb{C}}) & \xleftarrow{\sim} & \pi_! \psi^*(TX, I) \otimes W_{can}^+ & & \downarrow \text{id} \otimes c(t) \\
& & \downarrow \text{id} \otimes c(t) & & \downarrow \\
& & & & [\pi_! \psi^*(TX, I) \otimes W_{can}^-]_r \\
& & \downarrow & & \swarrow \text{Real} \\
& & \pi_! \psi^*(TX, I) \otimes W_{can}^- & &
\end{array}$$

Definition 3.3.7. Es sei $\psi \in \Gamma(M, W_{L,X})$ ein verallgemeinerter Spinor. Wir definieren die *verallgemeinerte Clifford-Multiplikation* c_ψ auf $\Gamma(T^*M \otimes \pi_! \psi^*(TX))$ durch

$$\begin{aligned}
c_\psi: \Gamma(T^*M \otimes \pi_! \psi^*(TX)) &\xrightarrow{\sim} \Gamma\left(T^*M \otimes_{\mathbb{R}} \left[\pi_! \psi^*(TX, I) \otimes_{\mathbb{C}} W_{can}^+\right]_r\right) \\
&\xrightarrow{\text{id} \otimes c} \Gamma\left([\pi_! \psi^*(TX, I) \otimes W_{can}^-]_r\right).
\end{aligned}$$

Schließlich erweitern wir den Dirac-Operator mittels der verallgemeinerten Konstruktionen für kovariante Ableitung und Clifford-Multiplikation:

Definition 3.3.8. Es sei $\psi \in \Gamma(M, W_{L,X})$ ein verallgemeinerter Spinor und A ein Zusammenhang auf dem Determinantenbündel P_{\det}^L , der auf L einen Zusammenhang B festlegt. In der Notation von Notiz 2.2.1 definieren wir den *verallgemeinerten Dirac-Operator* mittels

$$\mathcal{D}_X^A: \psi \in \Gamma(W_{L,X}) \xrightarrow{\nabla^{B \oplus \phi \otimes B}} \Gamma(T^*M \otimes \pi_! \psi^*(TX)) \xrightarrow{c_\psi} \Gamma([\pi_! \psi^*(TX, I) \otimes W_{can}^-]_r).$$

Bemerkung. Aus den vorangehenden Betrachtungen ist klar, dass es sich bei diesen Definitionen um Verallgemeinerungen des klassischen Falls $X = \mathbb{H}$ handelt.

3.4 Verallgemeinerte Seiberg-Witten-Gleichungen

Die Momentenabbildungen $\mu_I: X \rightarrow \mathbb{R}$ und $\mu_{\mathbb{C}} := \mu_J + i\mu_K: X \rightarrow \mathbb{C}$, die wir für einen Gibbons-Hawking-Raum X bezüglich der diagonalen S^1 -Wirkung erhalten, erfüllen wie im linearen Fall, dass

$$\mu_I \circ \rho(e^{i\gamma}, e^{i\delta}) = \mu_I \quad (3.30)$$

$$\mu_{\mathbb{C}} \circ \rho(e^{i\gamma}, e^{i\delta}) = e^{i(\gamma-\delta)} \mu_{\mathbb{C}}. \quad (3.31)$$

Daher sind die folgenden Abbildungen wie im linearen Fall wohldefiniert (vergleiche (3.3)):

$$\begin{aligned} \mu_I: \Gamma(W_{L,X}) &\longrightarrow \Omega^0(M, \mathbb{R}) \\ \mu_{\mathbb{C}}: \Gamma(W_{L,X}) &\longrightarrow \Omega^{2,0}(M, \mathbb{C}) \end{aligned}$$

Damit formulieren wir schließlich die verallgemeinerten Seiberg-Witten-Gleichungen:

Definition 3.4.1. Sei (M, g_M, I_M) eine Kählermannigfaltigkeit mit $\text{Spin}^{\mathbb{C}}(4)$ -Struktur P_L und (X, g, I, J, K) ein Gibbons-Hawking-Raum. Für einen Zusammenhang A auf dem Determinantenbündel P_{\det}^L und einen verallgemeinerten Spinor $\psi \in \Gamma(W_{L,X})$ definieren wir die *verallgemeinerten Seiberg-Witten-Gleichungen*

$$\begin{cases} \mathcal{D}_X^A \psi &= 0 \\ F_A^+ &= \frac{i}{2} (\mu_I(\psi) \omega_M + \mu_{\mathbb{C}}(\psi) + \overline{\mu_{\mathbb{C}}(\psi)}) \end{cases}$$

oder äquivalent

$$\begin{cases} \mathcal{D}_X^A \psi &= 0 \\ (F_A^+)^{1,1} &= \frac{i}{2} \mu_I(\psi) \omega_M \\ F_A^{0,2} &= \frac{i}{2} \overline{\mu_{\mathbb{C}}(\psi)} \end{cases} \quad (3.32)$$

Bemerkung. Die zweite verallgemeinerte Seiberg-Witten-Gleichung ist gerade so gewählt, dass sie im klassischen Fall die zweite bisherige Seiberg-Witten-Gleichung ist (vergleiche (3.4)).

3.5 Die Wirkung der Eichgruppe

Die Eichgruppe $\mathcal{G} = C^\infty(M, S^1)$ wirkt auf dem *verallgemeinerten Konfigurationsraum*

$$\mathcal{C}_{L,X} := \left\{ (A, \psi) \mid A \text{ Zusammenhang auf } P_{\det}^L, \psi \in \Gamma(W_{L,X}) \right\}$$

durch

$$\gamma \cdot (A, \psi) := (A^\gamma, \gamma \cdot \psi),$$

wobei wie bisher $A^\gamma = A - 2\gamma^* \eta$ (vergleiche (2.7)). Auf den verallgemeinerten Spinoren induzieren wir die Wirkung $\gamma \cdot \psi$ aus der diagonalen S^1 -Wirkung auf X , das heißt

für $\psi = [q, x] \in \Gamma(Q_L \times_\rho X)$ meinen wir $\gamma \cdot \psi = [q, \gamma \cdot x]$ bzw. für die entsprechende antiäquivalente Funktion f_ψ gilt $f_{\gamma \cdot \psi} = \gamma \cdot f_\psi$. Die Wirkung ist wohldefiniert, da die diagonale S^1 -Wirkung mit der $S^1 \times S^1$ -Wirkung ρ kommutiert.

In (2.10) haben wir bereits gesehen, dass $F_{A^\gamma} = F_A$. Weiterhin sind auch μ_I und $\mu_{\mathbb{C}}$ invariant unter der diagonalen S^1 -Wirkung (siehe (3.30),(3.31)). Wir halten fest

$$\begin{aligned} F_A^+ &= \frac{i}{2} (\mu_I(\psi)\omega_M + \mu_{\mathbb{C}}(\psi) + \overline{\mu_{\mathbb{C}}}(\psi)) \\ \iff F_{A^\gamma}^+ &= \frac{i}{2} (\mu_I(\gamma \cdot \psi)\omega_M + \mu_{\mathbb{C}}(\gamma \cdot \psi) + \overline{\mu_{\mathbb{C}}}(\gamma \cdot \psi)). \end{aligned} \quad (3.33)$$

Untersuchen wir also, wie sich die Eichgruppe \mathcal{G} für die erste verallgemeinerte Seiberg-Witten-Gleichung auswirkt. Es sei wiederum B der Zusammenhang auf L , der durch einen Zusammenhang A auf P_{\det}^L festgelegt wird. Dann wirkt \mathcal{G} auf B durch $B^\gamma = B - \gamma^* \eta$ (vergleiche (2.6)) und entsprechend auf dem Zusammenhang $C := B \oplus \Phi \otimes B$ auf dem $S^1 \times S^1$ -Bündel Q_L durch $C^\gamma = B^\gamma \oplus \Phi \otimes B^\gamma$.

Die Wirkung der Eichgruppe \mathcal{G} auf dem verallgemeinerten Spinorbündel $\Gamma(W_{L,X})$ induziert eine abgeleitete Wirkung auf den Zielräumen der verallgemeinerten kovarianten Ableitung. Für $\gamma \in \mathcal{G}$ und $\psi \in \Gamma(W_{L,X})$ notieren wir diese ebenfalls mit

$$\begin{aligned} \gamma \cdot : \Gamma(\pi_! \psi^*(TX)) &\longrightarrow \Gamma(\pi_!(\gamma \cdot \psi)^*(TX)) \\ [q, t] &\longmapsto [q, \gamma(q)_* t] \end{aligned} \quad (3.34)$$

Die Wirkung ist wiederum wohldefiniert, da die diagonale S^1 -Wirkung mit der $S^1 \times S^1$ -Wirkung kommutiert.

Lemma 3.5.1. *Für $\gamma \in \mathcal{G}$ und $\psi \in \Gamma(W_{L,X})$ gilt $\gamma \cdot \nabla^C(\gamma^{-1} \cdot \psi) = \nabla^{C^\gamma} \psi$.*

Beweis. Sei f_ψ wiederum die zugehörige antiäquivalente Funktion und $\beta_x : S^1 \rightarrow X$ für $x \in X$ durch $g \mapsto g \cdot x$ gegeben. Für $q \in Q_L$ und $t \in T_q Q_L$ gilt dann

$$\begin{aligned} \gamma(q)_* \left(f_{\nabla^C(\gamma^{-1} \cdot \psi)} \Big|_q (t) \right) &= \gamma(q)_* \left(df_{\gamma^{-1} \cdot \psi} \Big|_q (t) + K^{C(t)} \Big|_{f_{\gamma^{-1} \cdot \psi}(q)} \right) \\ &= \gamma(q)_* \left(d(\gamma^{-1} \cdot f_\psi) \Big|_q (t) \right) + \gamma(q)_* K^{C(t)} \Big|_{(\gamma^{-1} \cdot f_\psi)(q)} \\ &= \gamma(q)_* \left(\gamma^{-1}(q)_* df_\psi \Big|_q (t) + D\beta_{f_\psi(q)} D_q \gamma^{-1}(t) \right) \\ &\quad + \rho(\gamma(q), \gamma(q))_* K^{C(t)} \Big|_{\rho^{-1}(\gamma(q), \gamma(q)) f_\psi(q)} \\ &= df_\psi \Big|_q (t) + D\beta_{(\gamma \cdot f_\psi)(q)} D_q \gamma^{-1}(t) + K^{C(t)} \Big|_{f_\psi(q)} \\ &= df_\psi \Big|_q (t) + D\beta_{(\gamma \cdot f_\psi)(q)} \left(-\gamma^{-2}(q) d\gamma \Big|_q (t) \right) + K^{C(t)} \Big|_{f_\psi(q)} \\ &= df_\psi \Big|_q (t) - D\beta_{(\gamma \cdot f_\psi)(q)} \left(\gamma^{-1}(q) \gamma^* \eta(t) \right) + K^{C(t)} \Big|_{f_\psi(q)} \\ &= df_\psi \Big|_q (t) - D_1 \beta_{f_\psi(q)} (\gamma^* \eta(t)) + K^{C(t)} \Big|_{f_\psi(q)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= df_\psi|_q(t) - D_1(\rho(\cdot)f_\psi(q)) \begin{pmatrix} \gamma^*\eta(t) \\ \gamma^*\eta(t) \end{pmatrix} + K^{C(t)} \Big|_{f_\psi(q)} \\
 &= df_\psi|_q(t) + K^{C(t) - \begin{pmatrix} \gamma^*\eta(t) \\ \gamma^*\eta(t) \end{pmatrix}} \Big|_{f_\psi(q)} \\
 &= df_\psi|_q(t) + K^{C^\gamma(t)} \Big|_{f_\psi(q)} = f_{\nabla^{C^\gamma}\psi} \Big|_q(t). \quad \square
 \end{aligned}$$

Setzen wir die Wirkung (3.34) der Eichgruppe \mathcal{G} auf $\Gamma(\pi_!\psi^*(TX))$ komplex linear auf $\Gamma(\pi_!\psi^*(TX_{\mathbb{C}}))$ fort und betrachten die Wirkung, die wir dadurch mit dem Isomorphismus (3.27) auf $\Gamma(\pi_!\psi^*(TX, I) \otimes W_{can}^+)$ induzieren, stellen wir fest, dass \mathcal{G} wegen Beobachtung (3.3.5) nur auf dem ersten Faktor $\Gamma(\pi_!\psi^*(TX, I))$ wirkt: Für $v_1 \otimes 1 + v_2 \otimes j \in T_{f_\psi(q)}X \otimes \mathbb{H}$ haben wir

$$\gamma(q)_*(v_1 \otimes 1 + v_2 \otimes j) = \gamma(q)_*(v_1) \otimes 1 + \gamma(q)_*(v_2) \otimes j.$$

Insbesondere bleibt das Bündel W_{can}^+ , auf dem wir die verallgemeinerte Clifford-Multiplikation ausführen, von dieser Wirkung unberührt. Wir definieren also auch hier für $\gamma \in \mathcal{G}$

$$\begin{aligned}
 \gamma \cdot : \Gamma(\pi_!\psi^*(TX, I) \otimes W_{can}^\pm) &\longrightarrow \Gamma(\pi_!(\gamma \cdot \psi)^*(TX, I) \otimes W_{can}^\pm) \\
 [q, v \otimes h] &\longmapsto [q, \gamma(q)_*v \otimes h].
 \end{aligned}$$

In diesem Sinne kommutiert die verallgemeinerte Clifford-Multiplikation mit der Eichgruppenwirkung. Zusammenfassend erhalten wir mit Lemma 3.5.1 das folgende kommutierende Diagramm:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \psi \mapsto \mathcal{D}_X^A \psi & & \\
 & \nearrow & & \searrow & \\
 \psi \in \Gamma(W_{L,X}) & \xrightarrow{\nabla^C} & \Gamma(T^*M \otimes \pi_!\psi^*(TX)) & \xrightarrow{c_\psi} & \Gamma([\pi_!\psi^*(TX, I) \otimes W_{can}^-]_r) \\
 \gamma \cdot \downarrow & & \downarrow \gamma \cdot & & \downarrow \gamma \cdot \\
 \gamma \cdot \psi \in \Gamma(W_{L,X}) & \xrightarrow{\nabla^{C^\gamma}} & \Gamma(T^*M \otimes \pi_!(\gamma \cdot \psi)^*(TX)) & \xrightarrow{c_{\gamma \cdot \psi}} & \Gamma([\pi_!(\gamma \cdot \psi)^*(TX, I) \otimes W_{can}^-]_r) \\
 & \searrow & & \nearrow & \\
 & & \gamma \cdot \psi \mapsto \mathcal{D}_X^{A^\gamma}(\gamma \cdot \psi) & &
 \end{array}$$

Wir schließen $\mathcal{D}_X^A \psi = 0 \Rightarrow \mathcal{D}_X^{A^\gamma}(\gamma \cdot \psi) = 0$. Invertieren liefert die Äquivalenz

$$\mathcal{D}_X^A \psi = 0 \iff \mathcal{D}_X^{A^\gamma}(\gamma \cdot \psi) = 0. \quad (3.35)$$

Zusammen mit (3.33) ist nun klar, dass die Eichgruppe \mathcal{G} auch auf den Lösungen der verallgemeinerten Seiberg-Witten-Gleichungen operiert.

Definition 3.5.2. Der *verallgemeinerte Seiberg-Witten-Modulraum* ist

$$\mathcal{M}_{L,X} := \left\{ (A, \psi) \in \mathcal{C}_{L,X} \mid \mathcal{D}_X^A \psi = 0, F_A^+ = \frac{i}{2} (\mu_I(\psi)\omega_M + \mu_{\mathbb{C}}(\psi) + \overline{\mu_{\mathbb{C}}(\psi)}) \right\} / \mathcal{G}$$

4 Der verallgemeinerte Seiberg-Witten-Modulraum

Wir beweisen zunächst eine verallgemeinerte Weitzenböck-Formel in L^2 -Normen ähnlich wie in [17]. Damit schließen wir auf eine zusätzliche Symmetrie der Lösungen (A, ψ) der verallgemeinerten Seiberg-Witten-Gleichungen (3.32). Wir zeigen weiter, dass verallgemeinerte Spinoren holomorph sind und als Schnitte von $Q_L \times X$ stets immer nur eine Sphäre in X treffen. Schließlich erhalten wir einige nicht-lineare Differentialgleichungen, die sich nur wenig von den Kazdan-Warner-Gleichungen unterscheiden, und die, wenn sie eindeutige glatte Lösungen haben, ähnliche Resultate wie im linearen Fall implizieren, d. h. eine Formulierung des Modulraumes durch Divisoren und charakteristische Klassen.

4.1 Eine Weitzenböck-Formel

Im klassischen Fall $X = \mathbb{H}$ gilt

Satz 4.1.1. (Weitzenböck-Formel) [16] *Seien A, ϕ, B Zusammenhänge wie in Abschnitt 2.2. Dann gilt*

$$(\mathcal{D}^A)^2 = \left(\nabla^{\phi \otimes B}\right)^* \nabla^{\phi \otimes B} + \frac{s}{4} + \frac{1}{2}c(F_A),$$

wobei s die Skalarkrümmung auf M bezeichnet.

Wir folgen nun dem Vorgehen aus [17], um eine *Weitzenböck-Formel* herzuleiten, welche die L^2 -Normen von verallgemeinerter kovarianter Ableitung eines Spinors mit dem verallgemeinerten Dirac-Operator vergleicht.

4.1.1 Beschreibung der Clifford-Multiplikation durch u^*F

In diesem Zusammenhang ist es für uns von Vorteil statt mit $S^1 \times S^1$ -antiäquivarianten Abbildungen $f_\psi: Q_L \rightarrow X$ zu arbeiten, verallgemeinerte Spinoren als $U(2) \times S^1$ -antiäquivariante Abbildungen $u: P_{U(2)} \times_M L \rightarrow X$ aufzufassen, da wir aus $P_{U(2)} \times_M L$ auch TM als assoziiertes Vektorbündel ableiten können. Wir erinnern uns, dass

$$Q_L = L \times_M \left(P_{U(2)} \times_{\det} L\right) = (P_{U(2)} \times_M L) \times_{\rho_{S^1} \oplus \rho_{S^1} \cdot \det} S^1 \times S^1$$

und nutzen die Korrespondenz

$$\begin{aligned} C^\infty(Q_L, X)^\rho &\xrightarrow{\sim} C^\infty(P_{U(2)} \times L, X)^{\tilde{\rho}} \\ f_\psi &\longmapsto u \quad \text{so dass, } u([p, l]) = f_\psi([p, l, 1, 1]), \end{aligned}$$

wobei die $U(2) \times S^1$ -Wirkung $\tilde{\rho}$ auf X durch

$$\tilde{\rho}([\lambda, q], u) := \rho(u, u\lambda^2)$$

gegeben ist. Für $(\lambda, q, u) \in S^1 \times \text{Sp}(1) \times S^1$ setzen wir außerdem

$$\tilde{\tilde{\rho}}(\lambda, q, u) := \tilde{\rho}([\lambda, q], u) = \rho(u, u\lambda^2). \quad (4.1)$$

Dann wirkt die zweite S^1 auf X hyperkählersch und die erste S^1 rotierend in folgendem Sinne: Für $\lambda = e^{i\alpha} \in S^1$ gilt

$$\begin{aligned} (e^{i\alpha})_* I (e^{-i\alpha})_* &= I \\ (e^{i\alpha})_* J (e^{-i\alpha})_* &= \cos(-2\alpha)J + \sin(-2\alpha)K \\ (e^{i\alpha})_* K (e^{-i\alpha})_* &= -\sin(-2\alpha)J + \cos(-2\alpha)K. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Beides ergibt sich aus (3.11). Deshalb schreiben wir für die erste S^1 oft S_r^1 und für die zweite S_h^1 – auch dann noch, wenn wir nicht von Wirkungen auf X sondern von Wirkungen auf anderen Mannigfaltigkeiten sprechen, die eine (anti-)äquivariante Abbildung nach X zulassen. Ferner sei

$$F := \{ f: \mathbb{H} \rightarrow T_x X \mid f \text{ isometrisch, } f \circ I_l = I_l \circ f, l = 1, 2, 3, x \in X \} \quad (4.3)$$

das Bündel isometrischer \mathbb{H} -linearer Rahmen von TX , wobei wir die komplexen Strukturen $I_1 = I, I_2 = J, I_3 = K$ auf \mathbb{H} wie im linearen Modell durch die Linksmultiplikation mit i, j, k verstehen wollen. Dann ist F mittels

$$\begin{aligned} \text{Sp}(1) \times F &\longrightarrow F \\ (A, f) &\longmapsto R_{A^{-1}}^* f \end{aligned} \quad (4.4)$$

ein rechtes $\text{Sp}(1)$ -Hauptfaserbündel über X . Schließlich setzen wir

$$\widetilde{Q}_L := P_{U(2)} \times_M L. \quad (4.5)$$

Um die beiden $\text{Sp}(1)$ -Wirkungen aus (4.1) und (4.4) besser unterscheidbar zu machen, schreiben wir fortan $\text{Sp}_0(1)$ für die $\text{Sp}(1)$ -Wirkung auf \widetilde{Q}_L , unter welcher die verallgemeinerten Spinoren u invariant sind bzw. welche trivial auf X wirkt (vergleiche (4.1)). Wir schreiben $\text{Sp}_F(1)$ für die $\text{Sp}(1)$ -Hauptfaserbündelwirkung (4.4) auf F bzw. $\text{Sp}(1)$ -Wirkungen, die dadurch induziert werden.

Betrachten wir nun für einen verallgemeinerten Spinor u das folgende Diagramm:

$$\begin{array}{ccc}
 u^*F & \xrightarrow{\hat{u}} & F \\
 \downarrow \hat{\pi} & & \downarrow \pi_X \\
 \widetilde{Q}_L & \xrightarrow{u} & X \\
 \downarrow \pi_M & & \\
 M & &
 \end{array}$$

$\widehat{\pi}_M$ (curved arrow from u^*F to M)

Ziel der folgenden Überlegungen ist es nun, eine einfache Beschreibung der verallgemeinerten Clifford-Multiplikation durch das Bündel u^*F zu erlangen. Wir beginnen mit folgendem

Lemma 4.1.2. *Die $S_r^1 \times \mathrm{Sp}_0(1) \times S_h^1$ -Wirkung*

$$\begin{aligned}
 (S_r^1 \times \mathrm{Sp}_0(1) \times S_h^1) \times F &\longrightarrow F \\
 ((\lambda, q, u), f) &\longmapsto \widetilde{\rho}(\lambda, q, u)_* L_\lambda^* f
 \end{aligned} \tag{4.6}$$

ist eine Hochhebung von $\widetilde{\rho}$ bezüglich π_X , welche mit der $\mathrm{Sp}_F(1)$ -Hauptfaserbündelwirkung (4.4) kommutiert.

Beweis. Der einzige nicht offensichtliche Punkt für die Wohldefiniertheit dieser Wirkung ist, dass ein Rahmen nach einer S_r^1 -Wirkung auch mit J und K kommutiert. Dazu rechnen wir für $e^{i\alpha} \in S_r^1$

$$\begin{aligned}
 ((e^{i\alpha})_* L_{e^{i\alpha}}^* f) J &= (e^{i\alpha})_* J f L_{e^{-i\alpha}} = (e^{-2\alpha I}) J (e^{i\alpha})_* f L_{e^{-i\alpha}} \\
 &= J (e^{2\alpha I}) (e^{i\alpha})_* f L_{e^{-i\alpha}} = J (e^{i\alpha})_* f (e^{2\alpha I}) L_{e^{-i\alpha}} \\
 &= J ((e^{i\alpha})_* L_{e^{i\alpha}}^* f) \quad \square
 \end{aligned}$$

Auf $u^*F = \{ (\tilde{q}, f) \in \widetilde{Q}_L \times F \mid f: \mathbb{H} \rightarrow T_{u(\tilde{q})}X \}$ betrachten wir fortan die folgende Rechtswirkung von $S_r^1 \times \mathrm{Sp}_0(1) \times S_h^1$

$$\begin{aligned}
 (S_r^1 \times \mathrm{Sp}_0(1) \times S_h^1) \times u^*F &\longrightarrow u^*F \\
 ((\lambda, q, u), (\tilde{q}, f)) &\longmapsto (\tilde{q} \cdot ([\lambda, q], u), \widetilde{\rho}(\lambda, q, u)_*^{-1} L_\lambda^* f)
 \end{aligned} \tag{4.7}$$

Die Wohldefiniertheit folgt hier unmittelbar aus der Antiäquivarianz des Spinors u bezüglich $\widetilde{\rho}$.

Desweiteren kommutiert diese Wirkung auch mit der zurückgezogenen $\mathrm{Sp}_F(1)$ -Wirkung

$$\begin{aligned} \mathrm{Sp}_F(1) \times u^*F &\longrightarrow u^*F \\ (A, (\tilde{q}, f)) &\longmapsto (\tilde{q}, R_{A^{-1}}^* f). \end{aligned} \quad (4.8)$$

Notiz 4.1.3. Zusammengefasst ergibt sich für unser obiges Diagramm folgendes Verhalten bezüglich der genannten Gruppenwirkungen:

$$\begin{array}{ccc} \begin{array}{ccc} u^*F & \xrightarrow{\hat{u}} & F \\ \text{äquivariant} \downarrow \hat{\pi} & \text{antiäquivariant} & \downarrow \pi_X \\ \widehat{Q}_L & \xrightarrow{u} & X \\ \text{invariant} \downarrow \pi_M & \text{antiäquivariant} & \\ M & & \end{array} & \widehat{\pi}_M & \begin{array}{ccc} u^*F & \xrightarrow{\hat{u}} & F \\ \text{invariant} \downarrow \hat{\pi} & \text{äquivariant} & \downarrow \pi_X \\ \widehat{Q}_L & \xrightarrow{u} & X \\ \downarrow \pi_M & & \\ M & & \end{array} \end{array}$$

$S_r^1 \times \mathrm{Sp}_0(1) \times S_h^1$ wirkt auf \widehat{Q}_L und u^*F von rechts und auf X und F von links.

$\mathrm{Sp}_F(1)$ wirkt auf F und u^*F von rechts.

Notiz 4.1.4. Wenn wir nun die Wirkung von $S_r^1 \times \mathrm{Sp}_0(1) \times S_h^1$ mit der Wirkung von $\mathrm{Sp}_F(1)$ auf u^*F vergleichen, stellen wir fest, dass

$$\left(S_r^1 \times \mathrm{Sp}_0(1) \times S_h^1 \right) \times_{\mathbb{Z}_2} \mathrm{Sp}_F(1) = \{ [(\lambda, q, u), A] \mid (-\lambda, -q, u, A) \sim (\lambda, q, u, -A) \}$$

frei auf u^*F operiert und diese Wirkung u^*F als $(S_r^1 \times \mathrm{Sp}_0(1) \times S_h^1) \times_{\mathbb{Z}_2} \mathrm{Sp}_F(1)$ -Rechtshauptfaserbündel über M beschreibt.

Aus diesem Hauptfaserbündel können wir mit den entsprechenden Darstellungen auch alle Bündel zurückgewinnen, die wir als assoziierte Bündel bezüglich $\widehat{Q}_L = P_{\mathrm{U}(2)} \times_M L$ erhalten (vergleiche hierzu Tabelle A.1). Zudem erhalten wir folgendes

Lemma 4.1.5. Sei ψ ein verallgemeinerte Spinor und $u \in C^\infty(\widehat{Q}_L, X)^{\tilde{\rho}}$ die entsprechende antiäquivariante Funktion. Dann ist

a) $[\pi_! \psi^*(TX, I) \otimes W_{can}^+]_r \cong \pi_! \psi^* TX \cong u^*F \times_{\sigma_+} \mathbb{H}$, wobei

$$\sigma_+ : (S_r^1 \times \mathrm{Sp}_0(1) \times S_h^1) \times_{\mathbb{Z}_2} \mathrm{Sp}_F(1) \longrightarrow \mathrm{Aut}(\mathbb{H}) \quad [(\lambda, q, u), A] \longmapsto (h \mapsto \bar{\lambda} h \bar{A}).$$

b) $[\pi_! \psi^*(TX, I) \otimes W_{can}^-]_r \cong u^*F \times_{\sigma_-} \mathbb{H}$, wobei

$$\sigma_- : (S_r^1 \times \mathrm{Sp}_0(1) \times S_h^1) \times_{\mathbb{Z}_2} \mathrm{Sp}_F(1) \longrightarrow \mathrm{Aut}(\mathbb{H}) \quad [(\lambda, q, u), A] \longmapsto (h \mapsto q h \bar{A}).$$

c) Die verallgemeinerte Clifford-Multiplikation aus Definition 3.3.7 übersetzt sich mit $t \in T^*M \cong TM = u^*F \times_s \mathbb{R}^4 \ni [r, x]$ wie folgt:

$$\begin{array}{ccc} [\pi_! \psi^*(TX, I) \otimes W_{can}^+]_r & \xrightarrow{\sim} & u^*F \times_{\sigma_+} \mathbb{H} \\ \text{id} \otimes c(t) \downarrow & & \downarrow [r, h] \mapsto [r, xh] \\ [\pi_! \psi^*(TX, I) \otimes W_{can}^-]_r & \xrightarrow{\sim} & u^*F \times_{\sigma_-} \mathbb{H} \end{array}$$

Mit anderen Worten: Die verallgemeinerte Clifford-Multiplikation ist die durch den Homomorphismus von $(S_r^1 \times \text{Sp}_0(1) \times S_h^1) \times_{\mathbb{Z}_2} \text{Sp}_F(1)$ -Darstellungen

$$(\mathbb{R}^4, s) \otimes (\mathbb{H}, \sigma_+) \longrightarrow (\mathbb{H}, \sigma_-)$$

gegebene Multiplikation

$$u^*F \times_{s \otimes \sigma_+} (\mathbb{R}^4 \otimes \mathbb{H}) \longrightarrow u^*F \times_{\sigma_-} \mathbb{H}.$$

Beweis. a) Wir geben den Isomorphismus explizit an. Es ist

$$u^*F \times_{\sigma_+} \mathbb{H} = \left\{ [r, h] \mid r \in u^*F, \quad h \in \mathbb{H}, \quad (r \cdot [(\lambda, q, u), A], h) \sim (r, \bar{\lambda}h\bar{A}) \right\}$$

sowie

$$\begin{aligned} \pi_! \psi^*TX &= f_\psi^*TX / (S_\gamma^1 \times S_\delta^1, \rho_*) \\ &= u^*TX / (S_r^1 \times \text{Sp}_0(1) \times S_h^1, \tilde{\rho}_*) \\ &= \left\{ [\tilde{q}, t] \mid \tilde{q} \in \tilde{Q}_L, \quad t \in T_{u(\tilde{q})}X, \quad (\tilde{q} \cdot [(\lambda, q), u], t) \sim (\tilde{q}, \tilde{\rho}(\lambda, q, u)_*t) \right\}. \end{aligned}$$

Die folgende Abbildung

$$\begin{aligned} u^*F \times_{\sigma_+} \mathbb{H} &\longrightarrow \pi_! \psi^*TX \\ [r, h] &\longmapsto [\hat{\pi}(r), \hat{u}(r)(h)] \end{aligned}$$

ist wohldefiniert und liefert den gesuchten Isomorphismus.

b) Per Definition von F übersetzt sich die komplexe Struktur I auf $\pi_! \psi^*TX$ unter dem Isomorphismus aus a) auf $u^*F \times_{\sigma_+} \mathbb{H}$ zur Linksmultiplikation mit i . Deshalb können wir wie in Beobachtung 3.3.6 vorgehen, um festzustellen, dass sich σ_+ und σ_- unter Φ wie folgt übersetzen (Tatsächlich müssen wir für den Beweis nur σ_- betrachten.):

$$(\mathbb{H} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}, \sigma_+ \otimes_{\mathbb{R}} 1) \xrightarrow{\Phi} ((\mathbb{H}, L_i) \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{H}, \sigma_+ \otimes (1 \oplus \det)) \quad (4.9)$$

$$(\mathbb{H} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}, \sigma_- \otimes_{\mathbb{R}} 1) \xrightarrow{\Phi} ((\mathbb{H}, L_i) \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{H}, \sigma_+ \otimes \rho_{stand}) \quad (4.10)$$

Wir verifizieren hier (4.10) unter Verwendung von (3.24):

$$\begin{aligned}
\Phi\sigma_-([\lambda, q, u, A])\Phi^{-1}(v \otimes h) &= \Phi\left(q\Phi^{-1}(v \otimes h)\overline{A}\right) \\
&= v\overline{A} \otimes qh \\
&= \overline{\lambda}v\overline{A} \otimes qh\lambda \\
&= \sigma_+([\lambda, q, u, A])v \otimes \rho_{stand}([\lambda, q, u, A])h
\end{aligned}$$

(Für (4.9) ersetze in der Rechnung q durch $\overline{\lambda}$.) Da die Darstellungen auf $\mathbb{H} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ komplex linear fortgesetzt sind, sind sie auch verträglich mit der Realteilbildung auf $(\mathbb{H}, L_i) \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{H}$ im Sinne von Beobachtung 3.3.4.

- c) Hierfür genügt es zu prüfen, dass folgendes durch Φ induziertes Diagramm kommutiert. Wir nutzen wiederum Eigenschaft (3.24). Auch diese Operation ist mit der jeweiligen Konjugation verträglich.

$$\begin{array}{ccc}
(\mathbb{R}^4, s) \otimes (\mathbb{H} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}, \sigma_+ \otimes_{\mathbb{R}} 1) & \xrightarrow{\sim} & (\mathbb{R}^4, s) \otimes ((\mathbb{H}, L_i) \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{H}, \sigma_+ \otimes (1 \oplus \det)) \\
\downarrow c \otimes 1 & & \downarrow \text{id} \otimes c \\
(\mathbb{H} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}, \sigma_- \otimes_{\mathbb{R}} 1) & \xrightarrow{\sim} & ((\mathbb{H}, L_i) \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{H}, \sigma_+ \otimes \rho_{stand})
\end{array}$$

□

4.1.2 Zusammenhänge auf u^*F

Wir haben bereits gesehen, dass u^*F ein $(S_r^1 \times \text{Sp}_0(1) \times S_h^1) \times_{\mathbb{Z}_2} \text{Sp}_F(1)$ -Hauptfaserbündel ist (vergleiche Notiz 4.1.4). Per Definition ist u^*F auch ein $\text{Sp}(1)$ -Hauptfaserbündel über \widetilde{Q}_L . Wir definieren nun eine Zusammenhangs-1-Form auf u^*F , die kompatibel mit den bisher betrachteten Zusammenhängen auf \widetilde{Q}_L und dem Levi-Civita-Zusammenhang auf F ist:

Lemma 4.1.6. *a) Es sei a eine zulässige Zusammenhangs-1-Form auf dem Bündel $\widetilde{Q}_L = P_{U(2)} \times_M L$ (d. h. auf dem $i\mathbb{R} \oplus \mathfrak{sp}(1) \cong \mathfrak{u}(2)$ -Anteil ist a der Chern-Zusammenhang) sowie φ_X die Levi-Civita-1-Form auf F . Die folgende 1-Form*

$$\begin{aligned}
\widehat{a} &:= \widehat{\pi}^*(a) \oplus \widehat{u}^*(\varphi_X) - \widehat{u}^*(\varphi_X) \left(K_{u^*F}^{\widehat{\pi}^*(a)(\cdot)} \right) \\
&\in \Omega^1 \left(u^*F, \left(i\mathbb{R} \oplus \mathfrak{sp}(1) \oplus i\mathbb{R} \right) \oplus \mathfrak{sp}(1) \right)
\end{aligned}$$

definiert eine Zusammenhangs-1-Form auf u^*F .

- b) Die so definierte Zusammenhangs-1-Form \widehat{a} erfüllt, dass der horizontale Lift eines Tangentialvektors $X \in TM$ bezüglich \widehat{a} gleich dem zunächst bezüglich a und dann bezüglich $\widehat{u}^*(\varphi_X)$ gelifteten Vektor übereinstimmt:

$$\widetilde{X}^{\widehat{a}} = \widetilde{X}^a \widehat{u}^*(\varphi_X)$$

Beweis. a) Wir benutzen hier Notiz 4.1.3 und beachten, dass die Gruppenwirkungen von $S_r^1 \times \mathrm{Sp}_0(1) \times S_h^1$ und $\mathrm{Sp}_F(1)$ kommutieren. Die Form \hat{a} verschwindet auf Fundamentalvektorfeldern: Für $\xi \in i\mathbb{R} \oplus \mathfrak{sp}(1) \oplus i\mathbb{R}$ und $\eta \in \mathfrak{sp}(1)$ ist

$$\begin{aligned} \hat{a}(K_{u^*F}^{(\xi,\eta)}) &= \hat{\pi}^*(a) \left(K_{u^*F}^{(\xi,\eta)} \right) \oplus \hat{u}^*(\varphi_X) \left(K_{u^*F}^{(\xi,\eta)} \right) - \hat{u}^*(\varphi_X) \left(K_{u^*F}^{\hat{\pi}^*(a)(K^{(\xi,\eta)}_{u^*F})} \right) \\ &= a(K_{\widetilde{Q_L}}^\xi) \oplus \varphi_X(-K_F^\xi + K_F^\eta) + \varphi_X \left(K_F^{a(K_{\widetilde{Q_L}}^\xi)} \right) \\ &= \xi \oplus -\varphi_X(K_F^\xi) + \eta + \varphi_X(K_F^\xi) = \xi \oplus \eta. \end{aligned}$$

Und die Form \hat{a} ist mit der Gruppenwirkung verträglich: Mit $g \in S_h^1 \times \mathrm{Sp}_0(1) \times S_r^1$ und $A \in \mathrm{Sp}_F(1)$ sowie $t \in \Gamma(T^*(u^*F))$ erhalten wir

$$\begin{aligned} &\hat{a}((R_{(g,A)})_*t) \\ &= \hat{\pi}^*(a) \left((R_{(g,A)})_*t \right) \oplus \hat{u}^*(\varphi_X) \left((R_{(g,A)})_*t \right) - \hat{u}^*(\varphi_X) \left(K_{u^*F}^{\hat{\pi}^*(a)((R_{(g,A)})_*t)} \right) \\ &= a((R_g)_*\hat{\pi}_*t) \oplus \varphi_X \left((L_{g^{-1}})_*(R_A)_*\hat{u}_*t \right) + \varphi_X \left(K_F^{a((R_g)_*\hat{\pi}_*t)} \right) \\ &= \mathrm{Ad}_{g^{-1}}\hat{\pi}^*(a)(t) \oplus \varphi_X \left((R_A)_*(L_{g^{-1}})_*\hat{u}_*t \right) + \varphi_X \left((R_A)_*K_F^{\mathrm{Ad}_{g^{-1}}\hat{\pi}^*(a)(t)} \right) \\ &= \mathrm{Ad}_{g^{-1}}\hat{\pi}^*(a)(t) \oplus \mathrm{Ad}_{A^{-1}}\varphi_X \left((L_{g^{-1}})_* \left(\hat{u}_*t + K_F^{\hat{\pi}^*(a)(t)} \right) \right) \\ &= \mathrm{Ad}_{g^{-1}}\hat{\pi}^*(a)(t) \oplus \mathrm{Ad}_{A^{-1}}\varphi_X \left(\hat{u}_*t + K_F^{\hat{\pi}^*(a)(t)} \right) \\ &= \mathrm{Ad}_{(g,A)^{-1}} \left(\hat{\pi}^*(a)(t) \oplus \hat{u}^*(\varphi_X) \left(t - K_{u^*F}^{\hat{\pi}^*(a)(t)} \right) \right) = \mathrm{Ad}_{(g,A)^{-1}}\hat{a}(t) \end{aligned}$$

b) Per Konstruktion sind die Bedingungen $\hat{a} = 0$ und $(\hat{\pi}^*a$ und $\hat{u}^*(\varphi_X) = 0)$ äquivalent. \square

Mithilfe dieses Zusammenhangs \hat{a} geben wir in Lemma 4.1.8 eine nützliche Beschreibung von $(\hat{\pi}_M)^* \left(\nabla^A \psi \right)$. Dazu betrachten wir zunächst die *kanonische 1-Form* θ_X auf F , das heißt

$$\theta_X|_f(v) = f^{-1}(\pi_X)_*(v) \in \mathbb{H} \quad \text{für } v \in T_f F.$$

Lemma 4.1.7. a) *Bezüglich der Wirkung (4.6) gilt für $(\lambda, q, u) \in S_r^1 \times \mathrm{Sp}_0(1) \times S_h^1$*

$$\begin{aligned} (\lambda, q, u)^*(\theta_X) &= \bar{\lambda}\theta_X \\ \text{sowie} \quad (\lambda, q, u)^*(\theta_X \wedge \bar{\theta}_X) &= \bar{\lambda}(\theta_X \wedge \bar{\theta}_X)\lambda. \end{aligned}$$

b) *Für $\omega = \omega_I i + \omega_J j + \omega_K k$ ist $(\pi_X)^*\omega = \frac{1}{2}\theta_X \wedge \bar{\theta}_X$.*

Beweis. a) Für $v, v_1, v_2 \in T_f F$ ist

$$\begin{aligned} (\lambda, q, u)^* \theta_X|_f(v) &= \left(\tilde{\rho}(\lambda, q, u)_* f \lambda \right)^{-1} (\pi_X)_*(\lambda, q, u)_*(v) \\ &= \bar{\lambda} f^{-1} \tilde{\rho}(\lambda, q, u)_*^{-1} \tilde{\rho}(\lambda, q, u)_*(\pi_X)_*(v) \\ &= \bar{\lambda} f^{-1} (\pi_X)_*(v) = \bar{\lambda} \theta_X|_f(v) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} (\lambda, q, u)^* \left(\theta_X \wedge \overline{\theta_X} \right) (v_1, v_2) &= \bar{\lambda} \theta_X(v_1) \cdot \overline{\bar{\lambda} \theta_X(v_2)} - \bar{\lambda} \theta_X(v_2) \cdot \overline{\bar{\lambda} \theta_X(v_1)} \\ &= \bar{\lambda} \theta_X(v_1) \cdot \overline{\theta_X(v_2)} \lambda - \bar{\lambda} \theta_X(v_2) \cdot \overline{\theta_X(v_1)} \lambda \\ &= \bar{\lambda} \left(\theta_X \wedge \overline{\theta_X} (v_1, v_2) \right) \lambda. \end{aligned}$$

b) Wir nutzen hier Lemma 3.1.2:

$$\begin{aligned} (\pi_X)^* \omega|_f(v_1, v_2) &= \omega|_f((\pi_X)_*(v_1), (\pi_X)_*(v_2)) \\ &= \omega_{\mathbb{H}}(f^{-1}(\pi_X)_*(v_1), f^{-1}(\pi_X)_*(v_2)) \\ &= \omega_{\mathbb{H}}(\theta_X(v_1), \theta_X(v_2)) \\ &= \frac{1}{2} dh \wedge d\bar{h}(\theta_X(v_1), \theta_X(v_2)) = \frac{1}{2} \theta_X \wedge \overline{\theta_X}(v_1, v_2) \quad \square \end{aligned}$$

Weiterhin führen wir, wenn wir u^*F mit einem Zusammenhang betrachten, die folgende Notation ein:

$$\begin{array}{ccc} \Omega^1(M, \pi_! u^* TX) & \xrightarrow{\sim} & \Gamma(M, T^*M \otimes \pi_! u^* TX) \\ \parallel & & \parallel \\ \Omega_{hor}^1(u^*F, \mathbb{H})^{\sigma+} & \xrightarrow{\iota_{hor}} & \Gamma(u^*F, (\mathbb{R}^4)^* \otimes \mathbb{H})^{s \otimes \sigma+} \end{array}$$

Das heißt, wenn wir für $r \in u^*F$ und $v \in \mathbb{H}$ den horizontalen Lift von $[r, v] \in TM$ an die Stelle r mit

$$\tilde{v}|_r := [r, \widetilde{v}]|_r$$

bezeichnen, gilt:

$$\iota_{hor}(\alpha)(r) = \sum_{i=0}^3 e^i \otimes \alpha|_r(\tilde{e}_i) = \sum_{i=0}^3 e^i \otimes \alpha|_r \left([r, \widetilde{e}_i]|_r \right)$$

Lemma 4.1.8. *Es sei ψ ein verallgemeinerter Spinor und $u \in C^\infty(\widetilde{Q}_L, X)^{\tilde{\rho}}$ die entsprechende antiäquivariante Funktion. Weiterhin sei B ein Zusammenhang auf dem S^1 -Bündel L , welcher mit den Levi-Civita-Zusammenhängen auf $P_{U(2)}$ und F einen Zusammenhang \hat{u} auf u^*F induziert (vgl. Lemma 4.1.6). Dann gilt mit $(\hat{u}^* \theta_X)_{hor} := \hat{u}^* \theta_X \circ \text{pr}_{hor, \hat{u}}$, dass*

$$(\hat{\pi}_M)^* \left(\nabla^{B \oplus \phi \otimes B} \psi \right) = \iota_{hor} \left((\hat{u}^* \theta_X)_{hor} \right).$$

Beweis. Seien $q \in Q_L$, $\tilde{q} \in \widetilde{Q}_L$, $r \in u^*F$ irgendwelche Punkte über $m \in M$. Wir erinnern uns (Definition 3.3.2), dass für $v \in TM$

$$\begin{aligned} \nabla^{B \oplus \phi \otimes B} \psi \Big|_m (v) &= \left[q, f_{\nabla^{B \oplus \phi \otimes B} \psi} \Big|_q (\tilde{v}|_q) \right]_\rho = \left[q, (f_\psi)_* (\tilde{v}|_q) + K^{B \oplus \phi \otimes B}(\tilde{v}) \Big|_{f_\psi(q)} \right]_\rho \\ &= [q, (f_\psi)_* (\tilde{v}|_q)]_\rho = [\tilde{q}, u_* (\tilde{v}|_{\tilde{q}})]_{\tilde{\rho}} \\ &= [\hat{\pi}(r), u_* (\tilde{v}|_{\hat{\pi}(r)})]_{\tilde{\rho}} = [\hat{\pi}(r), u_* \hat{\pi}_* (\tilde{v}|_r)]_{\tilde{\rho}} \\ &= [r, \hat{u}(r)^{-1} (u_* \hat{\pi}_* (\tilde{v}|_r))]_{\sigma_+} \end{aligned}$$

Damit folgt für $(\hat{\pi}_M)^* (\nabla^{B \oplus \phi \otimes B} \psi) \in \Gamma(u^*F, (\mathbb{R}^4)^* \otimes \mathbb{H})^{s \otimes \sigma_+}$

$$\begin{aligned} (\hat{\pi}_M)^* (\nabla^{B \oplus \phi \otimes B} \psi) (r) &= \sum_{i=0}^3 e^i \otimes (\hat{u}(r))^{-1} (u_* \hat{\pi}_* \tilde{e}_i) = \sum_{i=0}^3 e^i \otimes (\hat{u}(r))^{-1} ((\pi_X)_* \hat{u}_* \tilde{e}_i) \\ &= \sum_{i=0}^3 e^i \otimes \theta_X|_{\hat{u}(r)} (\hat{u}_* \tilde{e}_i) = \sum_{i=0}^3 e^i \otimes \hat{u}^* \theta_X|_r (\tilde{e}_i) \\ &= \iota_{hor} ((\hat{u}^* \theta_X)_{hor}) (r). \end{aligned} \tag{4.11}$$

□

4.1.3 Die verallgemeinerte Weitzenböck-Formel

Auf $\mathbb{R}^4 \otimes \mathbb{H}$ betrachten wir die folgenden drei Bilinearformen:

$$\nu(x_1 \otimes h_1, x_2 \otimes h_2) := g_{\mathbb{H}}(x_1 h_1, x_2 h_2) \quad (\text{wobei die Multiplikation } xh \text{ durch die Identifizierung } \mathbb{R}^4 \cong \mathbb{H} \text{ (siehe Anhang (A.1)) gegeben ist})$$

$$\begin{aligned} \nu_1(x_1 \otimes h_1, x_2 \otimes h_2) &:= g_{\mathbb{H}}(x_1, x_2) g_{\mathbb{H}}(h_1, h_2) \\ \nu_2(x_1 \otimes h_1, x_2 \otimes h_2) &:= (\nu - \nu_1)(x_1 \otimes h_1, x_2 \otimes h_2) \end{aligned}$$

Diese Bilinearform sind invariant unter der Wirkung von $s \otimes \sigma_+$. Deshalb sind auch

$$\nu, \nu_1, \nu_2: \Gamma(M, T^*M \otimes \pi_! u^*TX) = \Gamma(u^*F, (\mathbb{R}^4)^* \otimes \mathbb{H})^{s \otimes \sigma_+} \rightarrow \Gamma(M, \mathbb{R})$$

wohldefiniert. Insbesondere ist in der obigen Notation (vergleiche Lemma 4.1.8)

$$\nu(\iota_{hor} (\hat{u}^* \theta_X) (r), \iota_{hor} (\hat{u}^* \theta_X) (r)) = |\mathcal{D}_X^A \psi|_{\hat{\pi}_M(r)}^2 \tag{4.12}$$

$$\nu_1(\iota_{hor} (\hat{u}^* \theta_X) (r), \iota_{hor} (\hat{u}^* \theta_X) (r)) = |\nabla^{B \oplus \phi \otimes B} \psi|_{\hat{\pi}_M(r)}^2. \tag{4.13}$$

Untersuchen wir also im Folgenden $\nu_2(\iota_{hor} (\hat{u}^* \theta_X) (r), \iota_{hor} (\hat{u}^* \theta_X) (r))$ und beginnen

mit einer kurzen Rechnung:

$$\begin{aligned}
& \nu_2(x_1 \otimes h_1, x_2 \otimes h_2) \\
&= (\nu - \nu_1)(x_1 \otimes h_1, x_2 \otimes h_2) = \operatorname{Re}(x_2 h_2 \overline{x_1 h_1}) - \operatorname{Re}(x_2 \overline{x_1}) \operatorname{Re}(h_2 \overline{h_1}) \\
&= \operatorname{Re}(x_2 h_2 \overline{h_1 x_1}) - \operatorname{Re}\left((h_2 \overline{h_1}) \operatorname{Re}(x_2 \overline{x_1})\right) = \operatorname{Re}(h_2 \overline{h_1} \overline{x_1} x_2) - \operatorname{Re}\left((h_2 \overline{h_1}) \operatorname{Re}(\overline{x_1} x_2)\right) \\
&= \operatorname{Re}\left((h_2 \overline{h_1}) \operatorname{Im}(\overline{x_1} x_2)\right) = \operatorname{Re}\left(\operatorname{Im}(h_2 \overline{h_1}) \operatorname{Im}(\overline{x_1} x_2)\right) = -\operatorname{Re}\left(\operatorname{Im}(h_2 \overline{h_1}) \overline{\operatorname{Im}(\overline{x_1} x_2)}\right) \\
&= -g_{\operatorname{ImH}}\left(\operatorname{Im}(h_2 \overline{h_1}), \operatorname{Im}(\overline{x_1} x_2)\right) \tag{4.14}
\end{aligned}$$

Sei θ_M die *kanonische 1-Form* auf $\widetilde{Q}_L = P_{U(2)} \times_M L$,
das heißt mit $\widetilde{Q}_L = P_{U(2)} \times_M L \xrightarrow{\kappa} P_{U(2)} \times_s \operatorname{SO}(4) = P_{\operatorname{SO}(4)}$

$$\theta_M|_{\widetilde{q}}(v) = (\kappa(\widetilde{q}))^{-1}(\pi_M)_*(v) \in \mathbb{R}^4 \quad \text{für } v \in T_{\widetilde{q}}\widetilde{Q}_L.$$

Dann ist

$$\begin{aligned}
& \theta_M \wedge \theta_M^t \in \Omega^2(\widetilde{Q}_L, \mathfrak{so}(4)) \\
& (\theta_M \wedge \theta_M^t)^+ \in \Omega^2(\widetilde{Q}_L, \mathfrak{so}_+(4)) = \Omega^2(\widetilde{Q}_L, \mathfrak{sp}_+(1)) = \Omega^2(\widetilde{Q}_L, \operatorname{ImH}),
\end{aligned}$$

wobei diese Identifikation aus

$$\begin{aligned}
\operatorname{ImH} &\longrightarrow \mathfrak{sp}_+(1) = \mathfrak{so}_+(4) \tag{4.15} \\
q &\longmapsto R_{\widetilde{q}}
\end{aligned}$$

und der Identifikation $\mathbb{R}^4 \cong \mathbb{H}$ kommt (vergleiche hierzu Abschnitt 2.1.2 und den Anhang (A.1)). Wenn wir $E(i, j) \in \mathfrak{so}(4)$ durch

$$E(i, j)(e_k) := \delta_{ik}(e_j) - \delta_{jk}(e_i)$$

definieren, identifizieren wir also durch (4.15)

$$\begin{aligned}
i &\longmapsto E(2, 3) - E(0, 1) \\
j &\longmapsto E(3, 1) - E(0, 2) \\
k &\longmapsto E(1, 2) - E(0, 3). \tag{4.16}
\end{aligned}$$

Andererseits ist

$$(\theta_M \wedge \theta_M^t)(\widetilde{e}_i, \widetilde{e}_j) = e_i e_j^t - e_j e_i^t = -E(i, j)$$

Diese Überlegungen resultieren in folgendem

Lemma 4.1.9. *Es gilt*

$$\nu_2(\iota_{hor}(\widehat{u}^* \theta_X), \iota_{hor}(\widehat{u}^* \theta_X))(\widehat{\pi}_M)^*(\ast 1) = -\frac{1}{2} \widehat{\pi}^* \left\langle (u^* \omega)_{hor} \wedge (\theta_M \wedge \theta_M^t)^+ \right\rangle_{\mathfrak{sp}_+(1)}.$$

Beweis. Da beide 4-Formen horizontal sind, genügt es zu prüfen, dass

$$\nu_2\left(\iota_{hor}(\widehat{u}^*\theta_X), \iota_{hor}(\widehat{u}^*\theta_X)\right) = -\frac{1}{2}\left\langle (u^*\omega)_{hor} \wedge \left(\theta_M \wedge \theta_M^t\right)^+ \right\rangle_{\mathfrak{sp}_+(1)}(\tilde{e}_0, \tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \tilde{e}_3).$$

Mit (4.11) und (4.14) sowie Lemma 4.1.7 erhalten wir

$$\begin{aligned} \nu_2\left(\iota_{hor}(\widehat{u}^*\theta_X), \iota_{hor}(\widehat{u}^*\theta_X)\right) &= \nu_2\left(\sum_{i=0}^3 e^i \otimes \widehat{u}^*\theta_X(\tilde{e}_i), \sum_{j=0}^3 e^j \otimes \widehat{u}^*\theta_X(\tilde{e}_j)\right) \\ &= \sum_{i,j=0}^3 -g_{\text{ImH}}\left(\text{Im}\left(\widehat{u}^*\theta_X(\tilde{e}_j)\overline{\widehat{u}^*\theta_X(\tilde{e}_i)}\right), \text{Im}\left(\overline{e^i}e^j\right)\right) \\ &= \sum_{j=1}^3 -g_{\text{ImH}}\left(\text{Im}\left(\widehat{u}^*(\theta_X \wedge \overline{\theta_X})(\tilde{e}_j, \tilde{e}_0)\right), \text{Im}\left(e^j\right)\right) \\ &\quad + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^3 -g_{\text{ImH}}\left(\text{Im}\left(\widehat{u}^*(\theta_X \wedge \overline{\theta_X})(\tilde{e}_j, \tilde{e}_i)\right), \text{Im}\left(\overline{e^i}e^j\right)\right) \\ &= \sum_{j=1}^3 -g_{\text{ImH}}\left(u^*\omega(\tilde{e}_j, \tilde{e}_0), e^j\right) + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^3 -g_{\text{ImH}}\left(u^*\omega(\tilde{e}_j, \tilde{e}_i), \overline{e^i}e^j\right) \\ &= u^*\omega_I(\tilde{e}_0, \tilde{e}_1) + u^*\omega_J(\tilde{e}_0, \tilde{e}_2) + u^*\omega_K(\tilde{e}_0, \tilde{e}_3) \\ &\quad - u^*\omega_K(\tilde{e}_1, \tilde{e}_2) + u^*\omega_J(\tilde{e}_1, \tilde{e}_3) - u^*\omega_I(\tilde{e}_2, \tilde{e}_3). \end{aligned}$$

Wir setzen weiter die Indexmenge

$$\mathcal{A} := \{(0, 1, 2, 3), (0, 2, 1, 3), (0, 3, 1, 2), (1, 2, 0, 3), (1, 3, 0, 2), (2, 3, 0, 1)\} \subset S_4.$$

Dann gilt andererseits unter Beachtung von (4.16)

$$\begin{aligned} &\left\langle (u^*\omega)_{hor} \wedge \left(\theta_M \wedge \theta_M^t\right)^+ \right\rangle_{\mathfrak{sp}_+(1)}(\tilde{e}_0, \tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \tilde{e}_3) \\ &= \sum_{\tau \in S_4} \text{sign}(\tau) \left\langle (u^*\omega)_{hor}(\widetilde{e_{\tau(0)}}, \widetilde{e_{\tau(1)}}), \left(\theta_M \wedge \theta_M^t\right)^+(\widetilde{e_{\tau(2)}}, \widetilde{e_{\tau(3)}})\right\rangle_{\mathfrak{sp}_+(1)} \\ &= 4 \sum_{(ijkl) \in \mathcal{A}} \text{sign}(ijkl) \left\langle (u^*\omega)(\tilde{e}_i, \tilde{e}_j), \left(\theta_M \wedge \theta_M^t\right)^+(\tilde{e}_k, \tilde{e}_l)\right\rangle_{\mathfrak{sp}_+(1)} \\ &= -4 \sum_{(ijkl) \in \mathcal{A}} \text{sign}(ijkl) \left\langle (u^*\omega)(\tilde{e}_i, \tilde{e}_j), E(k, l)^+ \right\rangle_{\mathfrak{sp}_+(1)} \\ &= -2 \left[+g_{\text{ImH}}((u^*\omega)(\tilde{e}_0, \tilde{e}_1), i) - g_{\text{ImH}}((u^*\omega)(\tilde{e}_0, \tilde{e}_2), -j) + g_{\text{ImH}}((u^*\omega)(\tilde{e}_0, \tilde{e}_3), k) \right. \\ &\quad \left. + g_{\text{ImH}}((u^*\omega)(\tilde{e}_1, \tilde{e}_2), -k) - g_{\text{ImH}}((u^*\omega)(\tilde{e}_1, \tilde{e}_3), -j) + g_{\text{ImH}}((u^*\omega)(\tilde{e}_2, \tilde{e}_3), -i) \right] \\ &= -2 \left[u^*\omega_I(\tilde{e}_0, \tilde{e}_1) + u^*\omega_J(\tilde{e}_0, \tilde{e}_2) + u^*\omega_K(\tilde{e}_0, \tilde{e}_3) \right. \\ &\quad \left. - u^*\omega_K(\tilde{e}_1, \tilde{e}_2) + u^*\omega_J(\tilde{e}_1, \tilde{e}_3) - u^*\omega_I(\tilde{e}_2, \tilde{e}_3) \right]. \quad \square \end{aligned}$$

Für das weitere Vorgehen nutzen wir, dass

$$\omega = \omega_I i + d\gamma \quad (4.17)$$

(vergleiche Lemma 3.2.6). Wir interessieren uns also für

$$(u^* d\gamma)_{hor} = (du^* \gamma)_{hor} = (d(u^* \gamma)_{vert})_{hor} + (d(u^* \gamma)_{hor})_{hor} \quad (4.18)$$

Lemma 4.1.10. *Sei B wiederum der Zusammenhang auf dem S^1 -Bündel L , welcher mit dem Levi-Civita-Zusammenhang auf $P_{U(2)}$ einen Zusammenhang a auf \widetilde{Q}_L induziert. Dann ist*

$$a) \left\langle (d(u^* \gamma)_{vert})_{hor} \wedge (\theta_M \wedge \theta_M^t)^+ \right\rangle_{\mathfrak{sp}_+(1)} = -\frac{1}{2} (\pi_M)^* \left(\operatorname{Re} \left\langle i \mu_{\mathbb{C}}(u), F_B^{2,0} \right\rangle_{\mathbb{C}} (*1) \right)$$

$$b) \left\langle (d(u^* \gamma)_{hor})_{hor} \wedge (\theta_M \wedge \theta_M^t)^+ \right\rangle_{\mathfrak{sp}_+(1)} = d \left\langle (u^* \gamma)_{hor} \wedge (\theta_M \wedge \theta_M^t)^+ \right\rangle_{\mathfrak{sp}_+(1)}.$$

Beweis. a) Zunächst lässt sich $(d(u^* \gamma)_{vert})_{hor}$ mit Hilfe der Krümmung F_a auf \widetilde{Q}_L ausdrücken:

$$\begin{aligned} (d(u^* \gamma)_{vert})_{hor} &= -(u^* \gamma)_{vert} [(\cdot)_{hor}, (\cdot)_{hor}] \\ &= (u^* \gamma) (-[(\cdot)_{hor}, (\cdot)_{hor}]_{vert}) = u^* \gamma (a^{-1}((\pi_M)^* F_a)) \\ &= u^* \gamma \left(K_{\widetilde{Q}_L}^{(\pi_M)^* F_a} \right) = -\gamma \left(K_X^{(\pi_M)^* F_a} \Big|_{u(\cdot)} \right) \end{aligned}$$

Die Fundamentalvektorfelder sind hier bezüglich der Wirkung aus Abschnitt 4.1.1 zu verstehen (vergleiche auch Notiz 4.1.3). Beachten wir nun, dass $a = \phi \oplus B \in \Omega^1(\widetilde{Q}_L, (i\mathbb{R} \oplus \mathfrak{sp}(1)) \oplus i\mathbb{R})$ und dass der $\operatorname{Sp}_0(1)$ -Anteil der $S_r^1 \times \operatorname{Sp}_0(1) \times S_h^1$ auf X gar nicht wirkt, ergibt sich:

$$(d(u^* \gamma)_{vert})_{hor} = -\gamma \left(K_X^{(\pi_M)^* F_{\operatorname{Pr}_{i\mathbb{R}} \phi \oplus B}} \Big|_{u(\cdot)} \right)$$

Andererseits gilt auch, dass $\gamma(K_X^{it}) = 0$, wenn wir mit K_X^{it} das Fundamentalvektorfeld bezüglich der rotierenden S_r^1 bezeichnen (vergleiche hierzu Lemma 3.2.6). Es ist also

$$(d(u^* \gamma)_{vert})_{hor} = -\gamma \left(K_X^{(\pi_M)^* F_B} \Big|_{u(\cdot)} \right),$$

wobei sich das Fundamentalvektorfeld jetzt nur noch auf die hyperkählersche S_h^1 -Wirkung bezieht. Deshalb folgt mit Lemma 3.2.6 auch, dass

$$(d(u^* \gamma)_{vert})_{hor} = \left(-i (\pi_M)^* F_B \mu_{\mathbb{C}}(u(\cdot)) \right) j = -i (\pi_M)^* F_B \mu_{\mathbb{C}}(u) j.$$

Der Übersichtlichkeit halber verzichten wir in den folgenden Rechnungen darauf, $(\pi_M)^*$ immer mitzuschreiben. Mit der Indexmenge

$$\mathcal{A} := \{ (0, 1, 2, 3), (0, 2, 1, 3), (0, 3, 1, 2), (1, 2, 0, 3), (1, 3, 0, 2), (2, 3, 0, 1) \} \subset S_4$$

erhalten wir nun für die horizontale 4-Form $\left\langle (d(u^*\gamma)_{vert})_{hor} \wedge (\theta_M \wedge \theta_M^t)^+ \right\rangle_{\mathfrak{sp}_+(1)}$

$$\begin{aligned} & \left\langle (d(u^*\gamma)_{vert})_{hor} \wedge (\theta_M \wedge \theta_M^t)^+ \right\rangle_{\mathfrak{sp}_+(1)}(\tilde{e}_0, \tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \tilde{e}_3) \\ &= \sum_{\tau \in S_4} \text{sign}(\tau) \left\langle (d(u^*\gamma)_{vert})_{hor}(\widetilde{e_{\tau(0)}}, \widetilde{e_{\tau(1)}}), (\theta_M \wedge \theta_M^t)^+(\widetilde{e_{\tau(2)}}, \widetilde{e_{\tau(3)}}) \right\rangle_{\mathfrak{sp}_+(1)} \\ &= 4 \sum_{(ijkl) \in \mathcal{A}} \text{sign}(ijkl) \left\langle (d(u^*\gamma)_{vert})_{hor}(\tilde{e}_i, \tilde{e}_j), (\theta_M \wedge \theta_M^t)^+(\tilde{e}_k, \tilde{e}_l) \right\rangle_{\mathfrak{sp}_+(1)} \\ &= -4 \sum_{(ijkl) \in \mathcal{A}} \text{sign}(ijkl) \left\langle (d(u^*\gamma)_{vert})_{hor}(\tilde{e}_i, \tilde{e}_j), E(k, l)^+ \right\rangle_{\mathfrak{sp}_+(1)} \\ &= -2 [+g_{\text{ImH}}(-iF_B(\tilde{e}_0, \tilde{e}_1)\mu_{\mathbb{C}}(u)j, i) - g_{\text{ImH}}(-iF_B(\tilde{e}_0, \tilde{e}_2)\mu_{\mathbb{C}}(u)j, -j) \\ &\quad + g_{\text{ImH}}(-iF_B(\tilde{e}_0, \tilde{e}_3)\mu_{\mathbb{C}}(u)j, k) + g_{\text{ImH}}(-iF_B(\tilde{e}_1, \tilde{e}_2)\mu_{\mathbb{C}}(u)j, -k) \\ &\quad - g_{\text{ImH}}(-iF_B(\tilde{e}_1, \tilde{e}_3)\mu_{\mathbb{C}}(u)j, -j) + g_{\text{ImH}}(-iF_B(\tilde{e}_2, \tilde{e}_3)\mu_{\mathbb{C}}(u)j, -i)] \\ &= -2 [-iF_B(\tilde{e}_0, \tilde{e}_2)\mu_J(u) - iF_B(\tilde{e}_0, \tilde{e}_3)\mu_K(u) \\ &\quad + iF_B(\tilde{e}_1, \tilde{e}_2)\mu_K(u) - iF_B(\tilde{e}_1, \tilde{e}_3)\mu_J(u)] \end{aligned}$$

Wir bemerken weiter, dass wir wegen

$$\mu_{\mathbb{C}}: \Gamma(W_L^+) \rightarrow \Omega^{2,0}(M, \mathbb{C}) \quad \text{bzw.} \quad \overline{\mu_{\mathbb{C}}}: \Gamma(W_L^+) \rightarrow \Omega^{0,2}(M, \mathbb{C})$$

$\mu_{\mathbb{C}}(u)$ bzw. $\overline{\mu_{\mathbb{C}}}(u)$ auch als komplex-wertige 2-Formen auffassen können (vergleiche hierzu (3.31) sowie (3.3)). In diesem Sinne gilt für die horizontale 4-Form

$$(\pi_M)^* \text{Re} \left\langle i\mu_{\mathbb{C}}(u) \wedge F_B \right\rangle_{\mathbb{C}}$$

$$\begin{aligned} & (\pi_M)^* \text{Re} \left\langle i\mu_{\mathbb{C}}(u) \wedge F_B \right\rangle_{\mathbb{C}}(\tilde{e}_0, \tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \tilde{e}_3) \\ &= \sum_{\tau \in S_4} \text{sign}(\tau) \text{Re} \left\langle i\mu_{\mathbb{C}}(u)(\widetilde{e_{\tau(0)}}, \widetilde{e_{\tau(1)}}), F_B(\widetilde{e_{\tau(2)}}, \widetilde{e_{\tau(3)}}) \right\rangle_{\mathbb{C}} \\ &= 4 \sum_{(ijkl) \in \mathcal{A}} \text{sign}(ijkl) \text{Re} \left\langle i\mu_{\mathbb{C}}(u)(\tilde{e}_i, \tilde{e}_j), F_B(\tilde{e}_k, \tilde{e}_l) \right\rangle_{\mathbb{C}} \\ &= 4 \left[+\text{Re} \left\langle i\mu_{\mathbb{C}}(u)(\tilde{e}_0, \tilde{e}_1), F_B(\tilde{e}_2, \tilde{e}_3) \right\rangle_{\mathbb{C}} - \text{Re} \left\langle i\mu_{\mathbb{C}}(u)(\tilde{e}_0, \tilde{e}_2), F_B(\tilde{e}_1, \tilde{e}_3) \right\rangle_{\mathbb{C}} \right. \\ &\quad + \text{Re} \left\langle i\mu_{\mathbb{C}}(u)(\tilde{e}_0, \tilde{e}_3), F_B(\tilde{e}_1, \tilde{e}_2) \right\rangle_{\mathbb{C}} + \text{Re} \left\langle i\mu_{\mathbb{C}}(u)(\tilde{e}_1, \tilde{e}_2), F_B(\tilde{e}_0, \tilde{e}_3) \right\rangle_{\mathbb{C}} \\ &\quad \left. - \text{Re} \left\langle i\mu_{\mathbb{C}}(u)(\tilde{e}_1, \tilde{e}_3), F_B(\tilde{e}_0, \tilde{e}_2) \right\rangle_{\mathbb{C}} + \text{Re} \left\langle i\mu_{\mathbb{C}}(u)(\tilde{e}_2, \tilde{e}_3), F_B(\tilde{e}_0, \tilde{e}_1) \right\rangle_{\mathbb{C}} \right] \\ &= -4 [-iF_B(\tilde{e}_0, \tilde{e}_2)\mu_J(u) - iF_B(\tilde{e}_0, \tilde{e}_3)\mu_K(u) \\ &\quad + iF_B(\tilde{e}_1, \tilde{e}_2)\mu_K(u) - iF_B(\tilde{e}_1, \tilde{e}_3)\mu_J(u)] \end{aligned}$$

Bei der letzten Gleichheit wenden wir die 2-Form $\mu_{\mathbb{C}}(u)$ an, das heißt den folgenden Homomorphismus von $U(2)$ -Darstellungen:

$$\begin{aligned} (\mathbb{C}, \overline{\det}) \otimes (\mathbb{H} \wedge \mathbb{H}, \Lambda^2 s) &\longrightarrow (\mathbb{C}, \text{triv}_{\mathbb{C}}) \\ z \otimes (v \wedge w) &\longmapsto z \text{pr}_{j\mathbb{C}} \left(\frac{1}{2} (\bar{v}w - w\bar{v}) \right) \end{aligned}$$

(Beachte hierbei wieder unsere Identifikation $\mathbb{R}^4 = \mathbb{H} = \mathbb{C} + j\mathbb{C}$ wie in Abschnitt A.1.)

Wenn wir die beiden obigen Rechnungen nun vergleichen, ergibt sich

$$\left\langle (d(u^*\gamma)_{vert})_{hor} \wedge (\theta_M \wedge \theta_M^t)^+ \right\rangle_{\mathfrak{sp}_+(1)} = \frac{1}{2} (\pi_M)^* \text{Re} \left\langle i\mu_{\mathbb{C}}(u) \wedge F_B \right\rangle_{\mathbb{C}}.$$

Da F_B rein imaginäre Werte annimmt, erhalten wir ferner mit dem konjugiert linearen Hodge-Stern-Operator $*$ und unter Beachtung, dass $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{C}}$ im zweiten Argument konjugiert linear ist:

$$\text{Re} \left\langle i\mu_{\mathbb{C}}(u) \wedge F_B \right\rangle_{\mathbb{C}} = \text{Re} \left\langle (-i\mu_{\mathbb{C}}(u)) \wedge F_B \right\rangle_{\mathbb{C}} = \text{Re} \left\langle (-i\mu_{\mathbb{C}}(u)), *F_B \right\rangle_{\mathbb{C}} \quad (*1)$$

Weiterhin ist die Zerlegung $\Omega^{2,0}(M, \mathbb{C}) \oplus \Omega^{1,1}(M, \mathbb{C}) \oplus \Omega^{0,2}(M, \mathbb{C})$ orthogonal bezüglich dieses Produktes und $\mu_{\mathbb{C}}(u) \in \Omega^{2,0}(M, \mathbb{C})$, also folgt mit $(*F_B)^{2,0} = F_B^{2,0}$

$$\text{Re} \left\langle i\mu_{\mathbb{C}}(u) \wedge F_B \right\rangle_{\mathbb{C}} = \text{Re} \left\langle -i\mu_{\mathbb{C}}(u), (*F_B)^{2,0} \right\rangle_{\mathbb{C}} \quad (*1) = \text{Re} \left\langle -i\mu_{\mathbb{C}}(u), F_B^{2,0} \right\rangle_{\mathbb{C}} \quad (*1)$$

und schließlich

$$\left\langle (d(u^*\gamma)_{vert})_{hor} \wedge (\theta_M \wedge \theta_M^t)^+ \right\rangle_{\mathfrak{sp}_+(1)} = -\frac{1}{2} (\pi_M)^* \left(\text{Re} \left\langle i\mu_{\mathbb{C}}(u), F_B^{2,0} \right\rangle_{\mathbb{C}} \quad (*1) \right).$$

- b) Für die kanonische 1-Form θ_M auf $\widetilde{Q}_L = P_{U(2)} \times_M L$ ist bezüglich des Levi-Civita-Zusammenhangs $(d\theta_M)_{hor} = 0$. Deshalb ist

$$\begin{aligned} &d \left\langle (u^*\gamma)_{hor} \wedge (\theta_M \wedge \theta_M^t)^+ \right\rangle_{\mathfrak{sp}_+(1)} \\ &= \left\langle (d(u^*\gamma)_{hor})_{hor} \wedge (\theta_M \wedge \theta_M^t)^+ \right\rangle_{\mathfrak{sp}_+(1)} + \left\langle (u^*\gamma)_{hor} \wedge ((d\theta_M)_{hor} \wedge \theta_M^t)^+ \right\rangle_{\mathfrak{sp}_+(1)} \\ &\quad - \left\langle (u^*\gamma)_{hor} \wedge (\theta_M \wedge (d\theta_M)_{hor}^t)^+ \right\rangle_{\mathfrak{sp}_+(1)} \\ &= \left\langle (d(u^*\gamma)_{hor})_{hor} \wedge (\theta_M \wedge \theta_M^t)^+ \right\rangle_{\mathfrak{sp}_+(1)}. \quad \square \end{aligned}$$

Satz 4.1.11. (Verallgemeinerte Weitzenböck-Formel) *Es sei ψ ein verallgemeinerter Spinor und $u \in C^\infty(\widetilde{Q}_L, X)^\rho$ die entsprechende antiäquivalente Funktion. Seien weiter A, ϕ, B Zusammenhänge wie in Abschnitt 2.2. Dann gilt*

$$\begin{aligned} \|\mathcal{D}_X^A \psi\|^2 - \|\nabla^{B \oplus \phi \otimes B} \psi\|^2 &= -\frac{1}{2} \int_M \left\langle (u^* \omega_{Ii})_{hor} \wedge (\theta_M \wedge \theta_M^t)^+ \right\rangle_{\mathfrak{sp}_+(1)} \\ &\quad + \frac{1}{4} \int_M \left(\operatorname{Re} \left\langle i\mu_{\mathbb{C}}(u), F_B^{2,0} \right\rangle_{\mathbb{C}} (*1) \right). \end{aligned}$$

Beweis. Wir tragen die Resultate dieses Abschnitts zusammen:

$$\begin{aligned} \|\mathcal{D}_X^A \psi\|^2 - \|\nabla^{B \oplus \phi \otimes B} \psi\|^2 &= \int_M \nu_2(\iota_{hor}(\widehat{u}^* \theta_X), \iota_{hor}(\widehat{u}^* \theta_X))(*1) \end{aligned} \quad (4.12), (4.13)$$

$$= \int_M -\frac{1}{2} \left\langle (u^* \omega)_{hor} \wedge (\theta_M \wedge \theta_M^t)^+ \right\rangle_{\mathfrak{sp}_+(1)} \quad (\text{Lemma 4.1.9})$$

$$= \int_M -\frac{1}{2} \left\langle ((u^* \omega_{Ii})_{hor} + (u^* d\gamma)_{hor}) \wedge (\theta_M \wedge \theta_M^t)^+ \right\rangle_{\mathfrak{sp}_+(1)} \quad (4.17)$$

$$\begin{aligned} &= \int_M -\frac{1}{2} \left\langle (u^* \omega_{Ii})_{hor} \wedge (\theta_M \wedge \theta_M^t)^+ \right\rangle_{\mathfrak{sp}_+(1)} \\ &\quad + \int_M -\frac{1}{2} \left\langle ((d(u^* \gamma)_{vert})_{hor} + (d(u^* \gamma)_{hor})_{hor}) \wedge (\theta_M \wedge \theta_M^t)^+ \right\rangle_{\mathfrak{sp}_+(1)} \end{aligned} \quad (4.18)$$

$$\begin{aligned} &= \int_M -\frac{1}{2} \left\langle (u^* \omega_{Ii})_{hor} \wedge (\theta_M \wedge \theta_M^t)^+ \right\rangle_{\mathfrak{sp}_+(1)} \\ &\quad + \int_M \frac{1}{4} \left(\operatorname{Re} \left\langle i\mu_{\mathbb{C}}(u), F_B^{2,0} \right\rangle_{\mathbb{C}} (*1) \right) \\ &\quad + \int_M -\frac{1}{2} d \left\langle (u^* \gamma)_{hor} \wedge (\theta_M \wedge \theta_M^t)^+ \right\rangle_{\mathfrak{sp}_+(1)} \end{aligned} \quad (\text{Lemma 4.1.10})$$

$$= \int_M -\frac{1}{2} \left\langle (u^* \omega_{Ii})_{hor} \wedge (\theta_M \wedge \theta_M^t)^+ \right\rangle_{\mathfrak{sp}_+(1)} + \int_M \frac{1}{4} \left(\operatorname{Re} \left\langle i\mu_{\mathbb{C}}(u), F_B^{2,0} \right\rangle_{\mathbb{C}} (*1) \right).$$

Die letzte Gleichheit folgt mit dem Satz von Stokes, da M keinen Rand besitzt. \square

Korollar 4.1.12. *Es sei (A, ψ) eine Lösung der verallgemeinerten Seiberg-Witten-Gleichungen (3.32).*

a) *Dann sind auch*

$$(A, \rho(s)\psi) \quad \text{mit} \quad s \in \{(1, 1), (-1, 1), (1, -1), (-1, -1)\} \subset S^1 \times S^1$$

jeweils Lösung der verallgemeinerten Seiberg-Witten-Gleichungen (3.32).

b) *Dann ist*

$$F_A^{0,2} = 0 \quad \text{und} \quad \mu_{\mathbb{C}}(\psi) = 0.$$

Insbesondere ist A ein holomorpher Zusammenhang.

Beweis. Es sei $u \in C^\infty(\widetilde{Q}_L, X)^\rho$ wiederum die entsprechende antiäquivariante Funktion zu ψ . Die Lösungen der verallgemeinerten Seiberg-Witten-Gleichungen (3.32) sind die Nullstellen des folgenden Funktionals:

$$\begin{aligned}
S(A, \psi) &= \|\mathcal{D}_X^A \psi\|^2 + \frac{1}{16} \left\| F_A^+ - \frac{i}{2} (\mu_I(\psi)\omega_M + \mu_{\mathbb{C}}(\psi) + \overline{\mu_{\mathbb{C}}}(\psi)) \right\|^2 \\
&= \|\mathcal{D}_X^A \psi\|^2 + \frac{1}{16} \|F_A^+\|^2 + \frac{1}{16} \left\| \frac{i}{2} (\mu_I(\psi)\omega_M + \mu_{\mathbb{C}}(\psi) + \overline{\mu_{\mathbb{C}}}(\psi)) \right\|^2 \\
&\quad - \frac{1}{8} \int_M \operatorname{Re} \left\langle F_A^+, \frac{i}{2} (\mu_I(\psi)\omega_M + \mu_{\mathbb{C}}(\psi) + \overline{\mu_{\mathbb{C}}}(\psi)) \right\rangle_{\mathbb{C}} (*1) \\
&= \|\mathcal{D}_X^A \psi\|^2 + \frac{1}{16} \|F_A^+\|^2 + \frac{1}{16} \left\| \frac{i}{2} (\mu_I(\psi)\omega_M + \mu_{\mathbb{C}}(\psi) + \overline{\mu_{\mathbb{C}}}(\psi)) \right\|^2 \\
&\quad - \frac{1}{8} \int_M \operatorname{Re} \left\langle F_\phi^+ + 2F_B^+, \frac{i}{2} (\mu_I(\psi)\omega_M + \mu_{\mathbb{C}}(\psi) + \overline{\mu_{\mathbb{C}}}(\psi)) \right\rangle_{\mathbb{C}} (*1)
\end{aligned}$$

Da ϕ der Chern-Zusammenhang ist, ist F_ϕ eine imaginärwertige $(1, 1)$ -Form. F_B^+ ist eine imaginärwertige, selbstduale 2-Form. Also erhalten wir bezüglich der orthogonalen Zerlegung $\Omega_+^2(M, \mathbb{C}) = \Omega^{2,0}(M, \mathbb{C}) \oplus \Omega^0(M, \mathbb{C}) \cdot \omega_M \oplus \Omega^{0,2}(M, \mathbb{C})$, dass

$$\begin{aligned}
S(A, \psi) &= \|\mathcal{D}_X^A \psi\|^2 + \frac{1}{16} \|F_A^+\|^2 + \frac{1}{16} \left\| \frac{i}{2} (\mu_I(\psi)\omega_M + \mu_{\mathbb{C}}(\psi) + \overline{\mu_{\mathbb{C}}}(\psi)) \right\|^2 \\
&\quad - \frac{1}{8} \int_M \operatorname{Re} \left\langle F_\phi^+, \frac{i}{2} \mu_I(\psi)\omega_M \right\rangle_{\mathbb{C}} (*1) - \frac{1}{8} \int_M \operatorname{Re} \left\langle 2(F_B^+)^{1,1}, \frac{i}{2} \mu_I(\psi)\omega_M \right\rangle_{\mathbb{C}} (*1) \\
&\quad - \frac{1}{8} \int_M \operatorname{Re} \left\langle 2(F_B^+)^{2,0}, \frac{i}{2} \mu_{\mathbb{C}}(\psi) \right\rangle_{\mathbb{C}} (*1) - \frac{1}{8} \int_M \operatorname{Re} \left\langle 2(F_B^+)^{0,2}, \frac{i}{2} \overline{\mu_{\mathbb{C}}}(\psi) \right\rangle_{\mathbb{C}} (*1) \\
&= \|\mathcal{D}_X^A \psi\|^2 + \frac{1}{16} \|F_A^+\|^2 + \frac{1}{16} \left(\left\| \frac{i}{2} \mu_I(\psi)\omega_M \right\|^2 + \left\| \mu_{\mathbb{C}}(\psi) \right\|^2 + \left\| \overline{\mu_{\mathbb{C}}}(\psi) \right\|^2 \right) \\
&\quad - \frac{1}{8} \int_M \operatorname{Re} \left\langle F_\phi^+, \frac{i}{2} \mu_I(\psi)\omega_M \right\rangle_{\mathbb{C}} (*1) - \frac{1}{8} \int_M \operatorname{Re} \left\langle 2(F_B^+)^{1,1}, \frac{i}{2} \mu_I(\psi)\omega_M \right\rangle_{\mathbb{C}} (*1) \\
&\quad - \frac{1}{4} \int_M \operatorname{Re} \left\langle (F_B^+)^{2,0}, i \mu_{\mathbb{C}}(\psi) \right\rangle_{\mathbb{C}} (*1)
\end{aligned}$$

Die Weitzenböckformel (Satz 4.1.11) liefert nun

$$\begin{aligned}
S(A, \psi) &= \|\nabla^{B \oplus \phi \otimes B} \psi\|^2 + \frac{1}{16} \|F_A^+\|^2 + \frac{1}{16} \left(\left\| \frac{i}{2} \mu_I(\psi)\omega_M \right\|^2 + \left\| \mu_{\mathbb{C}}(\psi) \right\|^2 + \left\| \overline{\mu_{\mathbb{C}}}(\psi) \right\|^2 \right) \\
&\quad - \frac{1}{8} \int_M \operatorname{Re} \left\langle F_\phi^+, \frac{i}{2} \mu_I(\psi)\omega_M \right\rangle_{\mathbb{C}} (*1) \\
&\quad - \frac{1}{8} \int_M \operatorname{Re} \left\langle 2(F_B^+)^{1,1}, \frac{i}{2} \mu_I(\psi)\omega_M \right\rangle_{\mathbb{C}} (*1) \\
&\quad - \frac{1}{2} \int_M \left\langle (u^* \omega_I i)_{hor} \wedge (\theta_M \wedge \theta_M^t)^+ \right\rangle_{\mathfrak{sp}_+(1)}. \tag{4.19}
\end{aligned}$$

- a) Wir beobachten, dass alle Summanden aus (4.19) unter den im Korollar erwähnten Transformationen $(A, \psi) \mapsto (A, \rho(s)\psi)$ invariant bleiben, genauer:

Es hängen $F_A = F_\phi + 2F_B$, θ_M sowie ω_M gar nicht von diesen Transformationen ab. Da $I \in \text{End}(TX)$ mit der Wirkung ρ kommutiert, sind $\mu_I(\psi)$ und $u^*\omega_I$ invariant. Desweiteren ist (vergleiche (3.15))

$$\mu_{\mathbb{C}}(\rho(1, -1)\psi) = \mu_{\mathbb{C}}(\rho(-1, 1)\psi) = -\mu_{\mathbb{C}}(\psi). \quad (4.20)$$

Die Normen von $\mu_{\mathbb{C}}(\psi)$ bzw. $\overline{\mu_{\mathbb{C}}}(\psi)$ bleiben also erhalten. Schließlich wirkt ρ auf X isometrisch, was zur Folge hat, dass auch $\|\nabla^{B \oplus \phi \otimes B} \psi\|^2$ unverändert bleibt (vergleiche hierzu ggf. (4.13) und (4.11)).

- b) Aus a) wissen wir, dass, wenn (A, ψ) die Seiberg-Witten-Gleichungen (3.32) löst, auch $(A, \rho(1, -1)\psi)$ eine Lösung von (3.32) ist. Mit (4.20) und der zweiten Seiberg-Witten-Gleichung $F_A^{0,2} = \frac{i}{2}\overline{\mu_{\mathbb{C}}}(\psi)$ folgt in diesem Fall

$$\frac{i}{2}\overline{\mu_{\mathbb{C}}}(\psi) = F_A^{0,2} = -\frac{i}{2}\overline{\mu_{\mathbb{C}}}(\psi).$$

Also ist $\mu_{\mathbb{C}}(\psi) = 0$ und $F_A^{0,2} = 0$. □

4.2 Holomorphe Beschreibung des verallgemeinerten Modulraumes

4.2.1 Komplexe Struktur auf dem verallgemeinerten Spinorbündel

Lemma 4.2.1. (vgl. [18]) Sei $Q \rightarrow B$ ein G -(Rechts-)Hauptfaserbündel über einer fast komplexen Mannigfaltigkeit (B, I_B) sowie (F, I_F) eine fast komplexe Mannigfaltigkeit mit einer linken G -Wirkung, welche bezüglich I_F pseudoholomorph wirkt (d. h. für $g \in G$ ist $g_*I_F = I_Fg_*$). Den Totalraum des Faserbündels $Q \times_G F \xrightarrow{\pi} B$ bezeichnen wir mit $Q \times_G F =: \mathcal{F}$. Sei weiter $a \in \Omega^1(Q, \mathfrak{g})$ eine Zusammenhangs-1-Form auf Q . Der Zusammenhang a induziert eine Zerlegung des Tangentialbündels

$$T\mathcal{F} = \mathcal{H}^a\mathcal{F} \oplus \mathcal{V}\mathcal{F} = \pi^*(TB) \oplus \mathcal{V}\mathcal{F}, \quad (4.21)$$

wobei $\mathcal{V}\mathcal{F} := \ker(d\pi)$. Bezüglich dieser Zerlegung definiert $I(a) := I_B \oplus I_F$ eine fast komplexe Struktur auf \mathcal{F} . Wenn I_B und I_F integrierbar sind und, wenn $F_a^{0,2} = 0$, dann ist auch $I(a)$ integrierbar.

Beweis. Sei $\mathcal{H}^a Q \subset TQ$ das durch a definierte horizontale Unterbündel, dann verstehen wir die Zerlegung (4.21) genauer mittels:

$$\begin{array}{ccc}
T_{[q,f]}\mathcal{F} & \xrightarrow{\sim} & \mathcal{H}_q^a Q \oplus T_f F \\
\parallel & \longmapsto & \downarrow dR_g \oplus dL_{g^{-1}} \\
\text{Äquivalenzklasse von} & \text{pr}_{hor}(t_q) & \\
\underbrace{[t_q, t_f]}_{(t_q, t_f) \in T_q Q \times T_f F} & \longmapsto & \underbrace{(t_q - K_q^{a(t_q)}, t_f + K_f^{a(t_q)})}_{\text{pr}_{hor}(t_q)} \\
T_{[qg, g^{-1}f]}\mathcal{F} & \xrightarrow{\sim} & \mathcal{H}_{qg}^a Q \oplus T_{g^{-1}f} F
\end{array}$$

Mit anderen Worten

$$T\mathcal{F} = \mathcal{H}^a \mathcal{F} \oplus \mathcal{V}\mathcal{F} = (B \times_G \mathcal{H}^a Q) \oplus (Q \times_G T F).$$

Wenn wir nun mit (lokalen) Vektorfeldern $Z \in \Gamma(\mathcal{F}, T\mathcal{F})$ arbeiten wollen, können wir äquivalent auch G -äquivariante Schnitte $\tilde{Z} \in \Gamma(Q \times F, (\text{pr}_Q)^* \mathcal{H}^a Q \oplus (\text{pr}_F)^*(TF))^G$ auf $Q \times F$ betrachten:

$$\begin{array}{ccc}
(\pi_Q)^* TQ \oplus (\pi_F)^*(TF) & & \\
\uparrow & \searrow \text{pr}_G & \\
(\pi_Q)^* \mathcal{H}^a Q \oplus (\pi_F)^*(TF) & \xrightarrow{\text{pr}_G} & T\mathcal{F} = \mathcal{H}^a \mathcal{F} \oplus \mathcal{V}\mathcal{F} = (B \times_G \mathcal{H}^a Q) \oplus (Q \times_G T F) \\
\downarrow \tilde{Z} & & \downarrow Z \\
Q \times F & \longrightarrow & \mathcal{F} = Q \times_G F
\end{array}$$

Die fast komplexe Struktur $I(a)$ ist durch folgendes Diagramm (wohl-)definiert (da G auf F pseudoholomorph wirkt):

$$\begin{array}{ccc}
(\pi_Q)^* \mathcal{H}^a Q \oplus (\pi_F)^*(TF) & \xrightarrow{\text{pr}_G} & T\mathcal{F} \\
\downarrow J(a) := \tilde{I}_B \oplus I_F & & \downarrow I(a) \\
(\pi_Q)^* \mathcal{H}^a Q \oplus (\pi_F)^*(TF) & \xrightarrow{\text{pr}_G} & T\mathcal{F}
\end{array}$$

Hierbei bezeichnet \tilde{I}_B die von I_B auf $(\pi_Q)^* \mathcal{H}^a Q$ induzierte komplexe Struktur.

Wir rechnen nun nach, dass der Nijenhuis-Tensor $N_{I(a)}$ verschwindet, wenn $N_{I_B} = 0$, $N_{I_F} = 0$ und $F_a^{0,2} = 0$.

Es genügt, dies für Vektorfelder der folgenden Form nachzuweisen:

$$\begin{aligned} f \cdot X \in \Gamma(Q \times F, (\pi_F)^*TF)^G & \quad \text{wobei} \quad f = \underline{f} \circ \pi_Q \text{ für ein } \underline{f} \in C^\infty(Q, \mathbb{R})^G \\ & \quad \text{und} \quad X = \underline{X} \circ \pi_F \text{ für ein } \underline{X} \in \Gamma(F, TF)^G \\ g \cdot Y \in \Gamma(Q \times F, (\pi_Q)^*\mathcal{H}^a Q)^G & \quad \text{wobei} \quad g = \underline{g} \circ \pi_F \text{ für ein } \underline{g} \in C^\infty(F, \mathbb{R})^G \\ & \quad \text{und} \quad Y = \underline{Y} \circ \pi_Q \text{ für ein } \underline{Y} \in \Gamma(Q, \mathcal{H}^a Q)^G \end{aligned}$$

Wir bemerken zunächst, dass für solche Vektorfelder gilt:

$$\begin{aligned} X(f) &= 0 & [X, Y] &= 0 \\ Y(g) &= 0 \end{aligned}$$

Insbesondere gilt deshalb für die Kommutatoren solcher Vektorfelder:

$$\begin{aligned} [f_1 X_1, f_2 X_2] &= f_1 f_2 [X_1, X_2] \\ [f X, g Y] &= f X(g) Y - g Y(f) X \\ [g_1 Y_1, g_2 Y_2] &= g_1 g_2 [Y_1, Y_2] \end{aligned}$$

Seien also $f_1 X_1, f_2 X_2 \in \Gamma(Q \times F, (\pi_F)^*TF)^G$ wie oben angegeben, dann ist

$$\begin{aligned} & N_{J(a)}(f_1 X_1, f_2 X_2) \\ &= [J(a) f_1 X_1, J(a) f_2 X_2] - [f_1 X_1, f_2 X_2] - J(a)[f_1 X_1, J(a) f_2 X_2] - J(a)[J(a) f_1 X_1, f_2 X_2] \\ &= [f_1 I_F X_1, f_2 I_F X_2] - [f_1 X_1, f_2 X_2] - J(a)[f_1 X_1, f_2 I_F X_2] - J(a)[f_1 I_F X_1, f_2 X_2] \\ &= f_1 f_2 ([I_F X_1, I_F X_2] - [X_1, X_2] - I_F[X_1, I_F X_2] - I_F[I_F X_1, X_2]) \\ &= f_1 f_2 N_{I_F}(X_1, X_2) = 0. \end{aligned}$$

Folglich ist auch $N_{I(a)}(\text{pr}_G(f_1 X_1), \text{pr}_G(f_2 X_2)) = \text{pr}_G(N_{J(a)}(f_1 X_1, f_2 X_2)) = 0$.

Seien weiter $f X \in \Gamma(Q \times F, (\pi_F)^*TF)^G$ und $g Y \in \Gamma(Q \times F, (\pi_Q)^*\mathcal{H}^a Q)^G$ wie oben angegeben, dann ist

$$\begin{aligned} & N_{J(a)}(f X, g Y) \\ &= [J(a) f X, J(a) g Y] - [f X, g Y] - J(a)[f X, J(a) g Y] - J(a)[J(a) f X, g Y] \\ &= [f I_F X, g \widetilde{I}_B Y] - [f X, g Y] - J(a)[f X, g \widetilde{I}_B Y] - J(a)[f I_F X, g Y] \\ &= f(I_F X)(g)(\widetilde{I}_B Y) - g(\widetilde{I}_B Y)(f)(I_F X) - f X(g) Y + g Y(f) X \\ & \quad - J(a) \left(f X(g)(\widetilde{I}_B Y) - g(\widetilde{I}_B Y)(f) X + f(I_F X)(g) Y - g Y(f)(I_F X) \right) \\ &= f(I_F X)(g)(\widetilde{I}_B Y) - g(\widetilde{I}_B Y)(f)(I_F X) - f X(g) Y + g Y(f) X \\ & \quad + f X(g) Y + g(\widetilde{I}_B Y)(f)(I_F X) - f(I_F X)(g)(\widetilde{I}_B Y) - g Y(f) X = 0. \end{aligned}$$

Folglich ist auch $N_{I(a)}(\text{pr}_G(f X), \text{pr}_G(g Y)) = \text{pr}_G(N_{J(a)}(f X, g Y)) = 0$.

Seien schließlich $g_1 Y_1, g_2 Y_2 \in \Gamma(Q \times F, (\pi_Q)^* \mathcal{H}^a Q)^G$ wie oben angegeben, dann ist

$$\begin{aligned}
& N_{J(a)}(g_1 Y_1, g_2 Y_2) \\
&= [J(a)g_1 Y_1, J(a)g_2 Y_2] - [g_1 Y_1, g_2 Y_2] - J(a)[g_1 Y_1, J(a)g_2 Y_2] - J(a)[J(a)g_1 Y_1, g_2 Y_2] \\
&= [g_1 \widetilde{I}_B Y_1, g_2 \widetilde{I}_B Y_2] - [g_1 Y_1, g_2 Y_2] - J(a)[g_1 Y_1, g_2 \widetilde{I}_B Y_2] - J(a)[g_1 \widetilde{I}_B Y_1, g_2 Y_2] \\
&= g_1 g_2 \left([\widetilde{I}_B Y_1, \widetilde{I}_B Y_2] - [Y_1, Y_2] - J(a)[Y_1, \widetilde{I}_B Y_2] - J(a)[\widetilde{I}_B Y_1, Y_2] \right) \in (\pi_Q)^* TQ.
\end{aligned}$$

Betrachten wir also

$$\begin{aligned}
& \text{pr}_G \left([\widetilde{I}_B Y_1, \widetilde{I}_B Y_2] - [Y_1, Y_2] - J(a)[Y_1, \widetilde{I}_B Y_2] - J(a)[\widetilde{I}_B Y_1, Y_2] \right) \\
&= \text{pr}_G \left([\widetilde{I}_B Y_1, \widetilde{I}_B Y_2]_{hor} - [Y_1, Y_2]_{hor} - \widetilde{I}_B [Y_1, \widetilde{I}_B Y_2]_{hor} - \widetilde{I}_B [\widetilde{I}_B Y_1, Y_2]_{hor} \right) \\
&\quad + \text{pr}_G \left(K_F^a([\widetilde{I}_B Y_1, \widetilde{I}_B Y_2]) - K_F^a([Y_1, Y_2]) - I_F K_F^a([Y_1, \widetilde{I}_B Y_2]) - I_F K_F^a([\widetilde{I}_B Y_1, Y_2]) \right) \\
&= \text{HL} (N_{I_B}(\text{d}\pi \text{pr}_G Y_1, \text{d}\pi \text{pr}_G Y_2)) \\
&\quad - \text{pr}_G \left(K_F^{F_a}(\widetilde{I}_B Y_1, \widetilde{I}_B Y_2) - K_F^{F_a}(Y_1, Y_2) - I_F K_F^{F_a}(Y_1, \widetilde{I}_B Y_2) - I_F K_F^{F_a}(\widetilde{I}_B Y_1, Y_2) \right) \\
&= \text{HL} (N_{I_B}(\text{d}\pi \text{pr}_G Y_1, \text{d}\pi \text{pr}_G Y_2)) + 4 \text{pr}_G \left(K_F^{F_a^{0,2}}(Y_1, Y_2) \right) = 0,
\end{aligned}$$

wobei $\text{HL}(t) = \tilde{t}$ den horizontalen Lift bezeichnet.

Folglich ist auch $N_{I(a)}(\text{pr}_G(g_1 Y_1), \text{pr}_G(g_2 Y_2)) = \text{pr}_G \left(N_{J(a)}(g_1 Y_1, g_2 Y_2) \right) = 0$. \square

Bemerkung. Der *Holomorphiebegriff* aus Lemma 4.2.1 für Faserbündel der Form $\mathcal{F} = Q \times_G F$ stimmt für den Fall, dass F eine lineare Faser und die G -Wirkung eine Darstellung ist, mit dem aus Definition 1.4.1 überein.

Korollar 4.2.2. *Seien A, ϕ, B Zusammenhänge wie in Abschnitt 2.2, so dass (A, ψ) die verallgemeinerten Seiberg-Witten-Gleichungen (3.32) löst. Sei weiter $a = \phi \otimes B$ der entsprechende Zusammenhang auf $\widetilde{Q}_L = P_{U(2)} \times_M L$. Dann definieren der Zusammenhang a , die komplexe Struktur auf M und jede komplexe Struktur I auf X im Sinne von Lemma 4.2.1 eine komplexe Struktur $I(a)$ auf dem verallgemeinerten Spinorbündel $\widetilde{Q}_L \times_{\tilde{\rho}} X = Q_L \times_{\rho} X = W_{L,X}$.*

Beweis. Da ϕ der Chern-Zusammenhang ist und $F_B^{0,2} = 0$ nach Lemma 4.1.12, folgt $F_a^{0,2} = 0$. Nun folgt die Behauptung unmittelbar aus Lemma 4.2.1. \square

4.2.2 Holomorphie der verallgemeinerten Spinoren des Lösungsraumes

Notiz 4.2.3. In der Situation von Lemma 4.2.1 heißt ein Schnitt $s: B \rightarrow \mathcal{F}$ *holomorph*, wenn s mit den komplexen Strukturen auf B und \mathcal{F} verträglich ist, d. h.

$$s_* I_B = I(a) s_*.$$

Eine G -äquivalente Funktion $f_s \in \Gamma(B, F)^G$ definiert genau dann einen holomorphen Schnitt s , wenn entsprechend auf $\mathcal{H}^a Q$

$$(f_s)_*|_{\mathcal{H}^a Q} \widetilde{I}_B = I_F (f_s)_*|_{\mathcal{H}^a Q}. \quad (4.22)$$

Lemma 4.2.4. a) *Es sei (A, ψ) eine Lösung der verallgemeinerten Seiberg-Witten-Gleichungen (3.32) sowie a der von A auf \widetilde{Q}_L induzierte Zusammenhang (vergleiche Korollar 4.2.2). Dann ist $\psi \in \Gamma(M, W_{L,X})$ holomorph bezüglich I_M und der komplexen Struktur $I(a)$ auf dem verallgemeinerten Spinorbündel.*

b) *Sei umgekehrt A ein holomorpher Zusammenhang auf P_{\det}^L und $\psi \in \Gamma(M, W_{L,X})$ holomorph bezüglich I_M und der komplexen Struktur $I(a)$, so ist die erste verallgemeinerte Seiberg-Witten-Gleichung $\mathcal{D}_X^A \psi = 0$ erfüllt.*

Beweis. a) Es sei $u \in C^\infty(\widetilde{Q}_L, X)^{\widehat{\rho}}$ wiederum die entsprechende antiäquivalente Funktion zu ψ . Wegen (4.22), genügt es zu zeigen, dass

$$u_*|_{\mathcal{H}^a \widetilde{Q}_L} \widetilde{I}_M = I_X u_*|_{\mathcal{H}^a \widetilde{Q}_L} \iff u_*|_{\mathcal{H}^a \widetilde{Q}_L} + I_X u_*|_{\mathcal{H}^a \widetilde{Q}_L} \widetilde{I}_M = 0. \quad (4.23)$$

Ist nun (A, ψ) eine Lösung der verallgemeinerten Seiberg-Witten-Gleichungen, so bedeutet $\mathcal{D}_X^A \psi = 0$, dass für alle $r \in u^* F$ gilt:

$$\begin{aligned} 0 &= c(\iota_{hor}(\widehat{u}^* \theta_X))(r) = \sum_{i=0}^3 c(e^i) \widehat{u}^* \theta_X(\widetilde{e}_i|_r) = \sum_{i=0}^3 c(e^i) \widehat{u}(r)^{-1} (u_* \widetilde{e}_i|_{\widehat{\pi}(r)}) \\ &= \widehat{u}(r)^{-1} \left(u_* \widetilde{e}_0|_{\widehat{\pi}(r)} + I u_* \widetilde{e}_1|_{\widehat{\pi}(r)} + J u_* \widetilde{e}_2|_{\widehat{\pi}(r)} + K u_* \widetilde{e}_3|_{\widehat{\pi}(r)} \right) \end{aligned}$$

(vergleiche hierzu Lemma 4.1.8 und Lemma 4.1.5 sowie die Definition von F in (4.3) und beachte, dass $\widehat{\pi}_*(\widetilde{e}_i|_r) = \widetilde{e}_i|_{\widehat{\pi}(r)}$ wegen Lemma 4.1.6). Da $\widehat{\pi}$ surjektiv ist, ist dies äquivalent zu der Aussage, dass für alle $q \in \widetilde{Q}_L$

$$0 = u_* \widetilde{e}_0|_q + I u_* \widetilde{e}_1|_q + J u_* \widetilde{e}_2|_q + K u_* \widetilde{e}_3|_q. \quad (4.24)$$

Mit Korollar 4.1.12 wissen wir, dass selbige Gleichung erhalten bleibt, wenn wir u durch $\rho(1, -1)u$ ersetzen:

$$\begin{aligned} 0 &= (\rho(1, -1)u)_* \widetilde{e}_0|_q + I (\rho(1, -1)u)_* \widetilde{e}_1|_q + J (\rho(1, -1)u)_* \widetilde{e}_2|_q + K (\rho(1, -1)u)_* \widetilde{e}_3|_q \\ &= \rho(1, -1)_* \left(u_* \widetilde{e}_0|_q + I u_* \widetilde{e}_1|_q - J u_* \widetilde{e}_2|_q - K u_* \widetilde{e}_3|_q \right) \end{aligned}$$

Also gilt auch für alle $q \in \widetilde{Q}_L$

$$0 = u_* \tilde{e}_0|_q + Iu_* \tilde{e}_1|_q - Ju_* \tilde{e}_2|_q - Ku_* \tilde{e}_3|_q.$$

Addition von (4.24) liefert für alle $q \in \widetilde{Q}_L$, dass

$$\begin{aligned} 0 &= u_* \tilde{e}_0|_q + Iu_* \tilde{e}_1|_q = u_* \tilde{e}_0|_q + Iu_* \widetilde{I_M e_0}|_q = u_* \tilde{e}_0|_q + Iu_* \widetilde{I_M} \tilde{e}_0|_q \\ &= u_* \widetilde{[q, e_0]}|_q + Iu_* \widetilde{I_M} \widetilde{[q, e_0]}|_q. \end{aligned}$$

Da nun u im Sinne von Notiz 4.1.3 $S_r^1 \times \mathrm{Sp}_0(1) \times S_h^1$ -antiäquivariant ist und $S_r^1 \times \mathrm{Sp}_0(1) \times S_h^1$ bezüglich I auf X holomorph wirkt, gilt für alle $q \in \widetilde{Q}_L$ und alle $g \in S_r^1 \times \mathrm{Sp}_0(1) \times S_h^1$, dass

$$0 = (L_{g^{-1}})_* \left(u_* \widetilde{[q, e_0]}|_q + Iu_* \widetilde{I_M} \widetilde{[q, e_0]}|_q \right) = u_* \widetilde{[q, e_0]}|_{qg} + Iu_* \widetilde{I_M} \widetilde{[q, e_0]}|_{qg}.$$

Damit ist $u_* t + Iu_* \widetilde{I_M} t = 0$ für alle $t \in \mathcal{H}^a \widetilde{Q}_L$, also (4.23), gezeigt.

b) Aus der Holomorphie von ψ erhalten wir umgekehrt $u_* t + Iu_* \widetilde{I_M} t$ für alle $t \in \mathcal{H}^a \widetilde{Q}_L$, d. h. insbesondere für alle $q \in \widetilde{Q}_L$

$$\begin{aligned} 0 &= u_* \tilde{e}_0|_q + Iu_* \widetilde{I_M} \tilde{e}_0|_q = u_* \tilde{e}_0|_q + Iu_* \tilde{e}_1|_q \\ 0 &= u_* \tilde{e}_2|_q + Iu_* \widetilde{I_M} \tilde{e}_2|_q = u_* \tilde{e}_2|_q - Iu_* \tilde{e}_3|_q. \end{aligned}$$

(Für die Konvention $I_M e_0 = e_1$ und $I_M e_2 = -e_3$ vergleiche Notiz 2.3.3.) Hieraus folgern wir unmittelbar, dass für alle $q \in \widetilde{Q}_L$

$$u_* \tilde{e}_0|_q + Iu_* \tilde{e}_1|_q + Ju_* \tilde{e}_2|_q + Ku_* \tilde{e}_3|_q = u_* \tilde{e}_0|_q + Iu_* \tilde{e}_1|_q + J(u_* \tilde{e}_2|_q - Iu_* \tilde{e}_3|_q) = 0.$$

Damit haben wir (4.24) für alle $q \in \widetilde{Q}_L$ gezeigt, was äquivalent zu $\mathcal{D}_X^A \psi = 0$ ist. \square

4.2.3 Fallunterscheidung nach Sphären im Gibbons-Hawking-Raum

Die verallgemeinerten Spinoren ψ , die als Lösungen (A, ψ) der verallgemeinerten Seiberg-Witten-Gleichungen auftreten, erfüllen also wie im linearen Fall,

- dass A eine *komplexe Struktur* auf dem verallgemeinerten Spinorbündel $W_{L,X}$ induziert sowie
- dass $\psi \in \Gamma(M, W_{L,X})$ *holomorph* bezüglich dieser komplexen Struktur ist.

Desweiteren haben wir in Korollar 4.1.12 schon gesehen, dass $\mu_{\mathbb{C}}(\psi) = 0$. Erinnern wir uns also an die Struktur der *k-Center-Gibbons-Hawking-Räume* mit den Zentren $y_\alpha = a_\alpha i$ (vergleiche Abschnitt 3.2). Dann können wir uns die Teilmenge $\mu_{\mathbb{C}}^{-1}(0) \subset X$

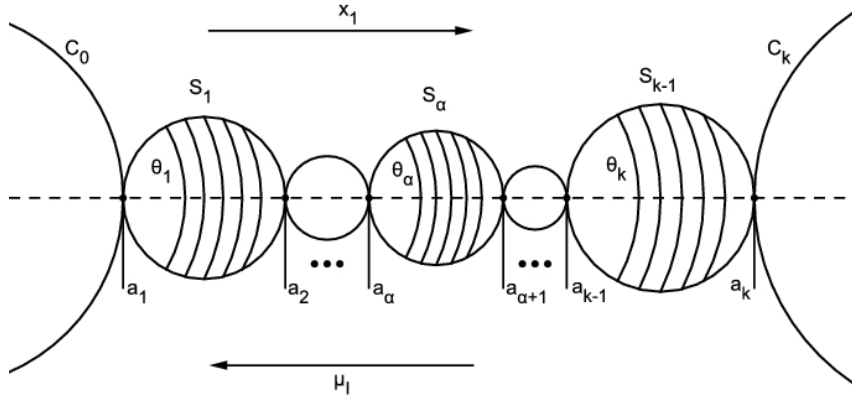


Abbildung 4.1 Die Niveaumenge $\mu_{\mathbb{C}}^{-1}(0) \subset X$ im Gibbons-Hawking-Raum X

wie folgt veranschaulichen wie in Abbildung 4.1. Die verbleibenden freien Parameter sind $\mu_I \in \mathbb{R}$ sowie $\theta_\alpha \in S^1$ für $\mu_I \in (-a_{\alpha+1}, -a_\alpha)$. Die Zentren $\mu^{-1}(-y_\alpha)$ selbst sind die Fixpunkte der hyperkählerschen S^1 -Wirkung. Der Teilraum $\mu_{\mathbb{C}}^{-1}(0) \subset X$ ist eine Kette von Sphären, welche rotations-symmetrisch um die μ_I -Achse angeordnet sind und von zwei „offenen“ Sphären begrenzt werden. (Im Übrigen sind die Sphären auch Repräsentanten der Erzeuger der zweiten Homologie $H_2(X) = \mathbb{Z}^{k-1}$ – vergleiche [21]).

Lemma 4.2.5. a) In der Notation von Abschnitt 3.2 sind für jedes $\alpha = 1, \dots, k-1$ die folgenden Teilsphären eines k -Center-Gibbons-Hawking-Raumes (X, g, I, J, K)

$$S_\alpha^2 := \mu_I^{-1}([-a_{\alpha+1}, -a_\alpha]) \cap \mu_{\mathbb{C}}^{-1}(0) \subset X$$

jeweils biholomorph zu $\mathbb{C}P^1$ bezüglich der komplexen Struktur I .

b) In der Notation von Abschnitt 3.2 sind die folgenden Teilmengen eines k -Center-Gibbons-Hawking-Raumes (X, g, I, J, K)

$$C_0 := \mu_I^{-1}([-a_1, \infty)) \cap \mu_{\mathbb{C}}^{-1}(0) \subset X$$

$$C_k := \mu_I^{-1}((-\infty, -a_k]) \cap \mu_{\mathbb{C}}^{-1}(0) \subset X$$

biholomorph zu \mathbb{C} bezüglich der komplexen Struktur I .

Beweis. Die komplexe Momentenabbildung $\mu_{\mathbb{C}}$ ist holomorph bezüglich I (vergleiche hierzu 3.2.5), also schränkt sich I für jedes α auf S_α^2 bzw. C_i ein und definiert dort eine komplexe Struktur. Diese ist – im Fall einer Sphäre bzw. im Fall von \mathbb{C} – eindeutig (bis auf Biholomorphie). \square

Notiz 4.2.6. (Biholomorphie explizit) Wir können biholomorphe Abbildungen für Lemma 4.2.5 explizit angeben: Wir verwenden hierzu die Notation aus Abschnitt 3.2. Für $\alpha = 1, \dots, k-1$ sind dies die Isomorphismen

$$S_\alpha^2 \xrightarrow{\Phi_\alpha} \mathbb{C}\mathbb{P}^1$$

$$S_\alpha^2 \cap U_\alpha \ni (\theta, x_1) \longmapsto [\theta : f_\alpha(x_1)]$$

$$\begin{aligned} \alpha\text{-tes Gibbons-Hawking-Zentrum } \mu^{-1}(-y_\alpha) &\longmapsto [1 : 0] \\ (\alpha+1)\text{-tes Gibbons-Hawking-Zentrum } \mu^{-1}(-y_{\alpha+1}) &\longmapsto [0 : 1] \end{aligned}$$

wobei $f_\alpha : (a_\alpha, a_{\alpha+1}) \rightarrow \mathbb{R}^+$

$$f_\alpha(x_1) = \left(\frac{\prod_{j=1}^\alpha l_j}{\prod_{j=\alpha+1}^k l_j} \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{\prod_{j=1}^\alpha |x - a_j|}{\prod_{j=\alpha+1}^k |x - a_j|} \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{\prod_{j=1}^\alpha (x_1 - a_j)}{\prod_{j=\alpha+1}^k (a_j - x_1)} \right)^{\frac{1}{2}}$$

In der Tat ist die Abbildung

$$S_\alpha^2 \cap U_\alpha \xrightarrow{F_\alpha} \mathbb{C} \setminus \{0\} \quad (\theta, x_1) \longmapsto f_\alpha(x_1)\bar{\theta}$$

ein holomorpher Diffeomorphismus, der die folgenden Randbedingungen erfüllt:

$$\boxed{\lim_{x_1 \rightarrow a_\alpha} f_\alpha(x_1) = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{x_1 \rightarrow a_{\alpha+1}} f_\alpha(x_1) = +\infty} \quad (4.25)$$

In den lokalen Basen $(\frac{\partial}{\partial \theta}, \frac{\partial}{\partial x_1})$ von $T(S_\alpha^2 \cap U_\alpha)$ bzw. $(\frac{\partial}{\partial \phi}, \frac{\partial}{\partial r})$ von $T(\mathbb{C} \setminus \{0\})$ sind die komplexen Stukturen $I \in \text{End}(TS_\alpha^2)$ und $I_{\mathbb{C}} \in \text{End}(T\mathbb{C})$ sowie das Differential DF_α wie folgt gegeben:

$$I = \frac{1}{V} \begin{pmatrix} 0 & -V^2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad I_{\mathbb{C}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad DF_\alpha = \begin{pmatrix} -f_\alpha & 0 \\ 0 & \frac{df_\alpha}{dx_1} \end{pmatrix}$$

Es ist folglich

$$\boxed{F_\alpha \text{ holomorph} \iff DF_\alpha I = I_{\mathbb{C}} DF_\alpha \iff \frac{df_\alpha}{dx_1} = f_\alpha V.}$$

Doch diese Differentialgleichung mit Randbedingungen (4.25) wird gerade von f_α gelöst:

Mit $n_\alpha(x_1) := \prod_{j=1}^\alpha l_j = \prod_{j=1}^\alpha (x_1 - a_j)$ und $d_\alpha := \prod_{j=\alpha+1}^k l_j = \prod_{j=\alpha+1}^k (a_j - x_1)$ sowie

$$p_\alpha := n_\alpha/d_\alpha \quad (\text{so dass } p_\alpha = (f_\alpha)^2) \quad (4.26)$$

erhalten wir

$$\begin{aligned}
 \frac{df_\alpha}{dx_1}(x_1) &= \frac{1}{2} (p_\alpha(x_1))^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{dp_\alpha}{dx_1}(x_1) \\
 &= \frac{1}{2} (p_\alpha(x_1))^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{\sum_{i=1}^{\alpha} \frac{n_\alpha}{x_1 - a_i} \cdot 1 d_\alpha - \sum_{i=\alpha+1}^k \frac{d_\alpha}{a_i - x_1} \cdot (-1) n_\alpha}{d_\alpha^2} \\
 &= \frac{1}{2} (p_\alpha(x_1))^{-\frac{1}{2}} \cdot p_\alpha(x_1) \left(\sum_{i=1}^{\alpha} \frac{1}{l_i} + \sum_{i=\alpha+1}^k \frac{1}{l_i} \right) = f_\alpha(x_1) \cdot V(\theta, x_1, 0, 0)
 \end{aligned}$$

Für die „offenen“ Randsphären C_0 und C_k sind analog biholomorphe Abbildungen

$$C_0 \xrightarrow{\Phi_0} \mathbb{C} \quad \text{bzw.} \quad C_k \xrightarrow{\Phi_k} \mathbb{C} \quad \text{durch}$$

$$\begin{array}{ll}
 C_0 \cap U_0 \ni (\theta, x_1) \mapsto \left(\prod_{j=1}^k l_j \right)^{\frac{1}{2}} \theta \in \mathbb{C} & \begin{array}{l} \text{1. Gibbons-} \\ \text{Hawking-Zentrum} \end{array} \mapsto 0 \in \mathbb{C} \\
 C_k \cap U_k \ni (\theta, x_1) \mapsto \left(\prod_{j=1}^k l_j \right)^{\frac{1}{2}} \bar{\theta} \in \mathbb{C} & \begin{array}{l} \text{k-tes Gibbons-} \\ \text{Hawking-Zentrum} \end{array} \mapsto 0 \in \mathbb{C}
 \end{array}$$

gegeben.

Notiz 4.2.7. Alle diese Biholomorphismen sind eindeutig bis auf Multiplikation mit $\lambda \in \mathbb{C}^*$, wenn wir das Bild der Gibbons-Hawking-Zentren wie hier angegeben fixieren.

Das folgende Korollar aus dem Lemma 4.2.4 liefert nun für die Lösungen (A, ψ) der verallgemeinerten Seiberg-Witten-Gleichungen, dass das Bild der zugehörigen antiäquivarianten Funktion $u \in C^\infty(\widetilde{Q}_L, X)^\rho$ stets nur in jeweils genau einer der Sphären S_α oder C_0 bzw. C_k enthalten ist oder konstant auf eines der Zentren $\mu^{-1}(-y_\alpha)$ abbildet. Welcher Fall eintritt, hängt nur vom Grad des Determinantenbündels $\deg(\mathcal{L}_{\det}^L)$ ab:

Korollar 4.2.8. *Es sei (A, ψ) eine Lösung der verallgemeinerten Seiberg-Witten-Gleichungen (3.32) und $u \in C^\infty(\widetilde{Q}_L, X)^\rho$ die entsprechende äquivariante Funktion. Dann gilt für das Bild von u in Abhängigkeit vom Grad des Determinantenbündels $\deg(\mathcal{L}_{\det}^L)$*

$$\left\{ \begin{array}{ll}
 \text{bild}(u) \subset C_0 & \text{falls } \deg(\mathcal{L}_{\det}^L) < \frac{\text{vol}(M)}{2\pi} a_1 \\
 \text{bild}(u) \subset S_\alpha^2 & \text{falls } \deg(\mathcal{L}_{\det}^L) \in \frac{\text{vol}(M)}{2\pi} (a_\alpha, a_{\alpha+1}) \quad \text{für } \alpha = 1, \dots, k-1 \\
 \text{bild}(u) \subset C_k & \text{falls } \deg(\mathcal{L}_{\det}^L) > \frac{\text{vol}(M)}{2\pi} a_k \\
 u \equiv \mu^{-1}(-y_\alpha) & \text{falls } \deg(\mathcal{L}_{\det}^L) = \frac{\text{vol}(M)}{2\pi} a_\alpha \quad \text{für } \alpha = 1, \dots, k.
 \end{array} \right.$$

In den ersten drei Fällen gilt zusätzlich $u \neq \mu^{-1}(-y_\alpha)$ für jedes $\alpha \in \{1, \dots, k\}$, d. h. u bildet in diesen Fällen nicht konstant auf ein Zentrum des Gibbons-Hawking-Raumes X ab.

Beweis. Aus Korollar 4.1.12 ist bereits bekannt, dass $\text{bild}(\psi) \in \mu_{\mathbb{C}}^{-1}(0) \subset W_{L,X}$, also

$$\begin{aligned} \text{bild}(u) \in \mu_{\mathbb{C}}^{-1}(0) &= C_k \cup S_{k-1}^2 \cup \dots \cup S_{\alpha}^2 \cup \dots \cup S_1^2 \cup C_0 \\ &= \mu_I^{-1}((-\infty, -a_k] \cup [-a_k, -a_{k-1}] \cup \dots \cup [-a_{\alpha+1}, -a_{\alpha}] \cup \dots \\ &\quad \dots \cup [-a_2, -a_1] \cup [-a_1, \infty)) \cap \mu_{\mathbb{C}}^{-1}(0) \subset X. \end{aligned}$$

Betrachten wir nun die Unterteilung von \mathbb{R} in *offene* Intervalle I_{α} für $\alpha = 0, \dots, k$, die durch die Lage der Zentren $\mu^{-1}(-y_{\alpha})$ für $\alpha = 1, \dots, k$ des Gibbons-Hawking-Raumes X auf der μ_I -Achse gegeben ist:

$$\begin{aligned} I_0 &:= (-a_1, \infty) \\ I_{\alpha} &:= (-a_{\alpha+1}, -a_{\alpha}) \quad \text{für } \alpha = 1, \dots, k-1 \\ I_k &:= (-\infty, -a_k) \end{aligned}$$

Dann sind auch

$$M_{\alpha} := (\mu_I \circ \psi)^{-1}(I_{\alpha}) \subset M$$

für $\alpha = 0, \dots, k$ offen in M .

Angenommen für zwei verschiedene Indizes α_1 und α_2 gilt $M_{\alpha_1} \neq \emptyset$ und $M_{\alpha_2} \neq \emptyset$. Da M zusammenhängend ist, gibt es dann auch zwei benachbarte Indizes α und $\alpha+1$ mit $M_{\alpha} \neq \emptyset$ und $M_{\alpha+1} \neq \emptyset$.

Sei zunächst α gerade. Mit Korollar 4.1.12 wissen wir dann auch, dass $(A, \rho(1, -1))$ ebenfalls eine Lösung der verallgemeinerten Seiberg-Witten-Gleichungen (3.32) ist. Da μ_I invariant unter der Wirkung von ρ ist, gilt dann auch

$$M_{\alpha} = (\mu_I \circ \rho(1, -1)\psi)^{-1}(I_{\alpha}) \quad M_{\alpha+1} = (\mu_I \circ \rho(1, -1)\psi)^{-1}(I_{\alpha+1}).$$

Desweiteren wirkt $\rho(1, -1)$ auf $\mu_I^{-1}(I_{\alpha}) \cap \mu_{\mathbb{C}}^{-1}(0)$, da α gerade ist, identisch, d. h. ψ und $\rho(1, -1)\psi$ stimmen auf der nicht leeren offenen Teilmenge $M_{\alpha} \subset M$ überein. Da aber ψ und $\rho(1, -1)\psi$ nach Lemma 4.2.4 holomorph sind, folgt $\psi \equiv \rho(1, -1)\psi$. Andererseits wirkt $\rho(1, -1)$ auf $\mu_I^{-1}(I_{\alpha+1}) \cap \mu_{\mathbb{C}}^{-1}(0)$ durch Drehung in der θ -Koordinate und ψ und $\rho(1, -1)\psi$ stimmen auf der nicht leeren Teilmenge $M_{\alpha+1} \subset M$ nicht überein – ein Widerspruch.

Für den Fall, dass α ungerade ist, liefert dasselbe Argument mit der Transformation $\rho(-1, 1)$ statt $\rho(1, -1)$ ebenfalls diesen Widerspruch.

Weiterhin haben wir in Korollar 4.1.12 auch gezeigt, dass A ein holomorpher Zusammenhang ist. Deshalb folgt mit den Seiberg-Witten-Gleichungen (3.32), dass

$$\deg(\mathcal{L}_{\det}^L) = \int_M c_1(\mathcal{L}_{\det}^L) \wedge \omega_M = \frac{i}{2\pi} \int_M (F_A^+)^{1,1} \wedge \omega_M = -\frac{1}{2\pi} \int_M \mu_I(\psi) \text{dvol}$$

Also entscheidet der Grad $\deg(\mathcal{L}_{\det}^L)$ wie behauptet über die Lage des Bildes von ψ bzw. u . \square

Betrachten wir also die Fallunterscheidung, die uns das Korollar 4.2.8 vorgibt:

Der Fall $\deg(\mathcal{L}_{\det}^L) = \frac{\text{vol}(M)}{2\pi} a_\alpha$ für ein $\alpha \in \{1, \dots, k\}$

Sei ψ_α der verallgemeinerte Spinor, dessen antiäquivariante Funktion $u_\alpha \in C^\infty(\widetilde{Q}_L, X)^{\widetilde{\rho}}$ konstant auf das α -te Zentrum $\mu^{-1}(-y_\alpha)$ des Gibbons-Hawking-Raumes abbildet, so ist der verallgemeinerte Seiberg-Witten-Modulraum in diesem Fall

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{L,X} &= \left\{ (A, \psi_\alpha) \in \mathcal{C}_L \mid F_A^+ = \frac{i}{2} \mu_I(\psi_\alpha) \omega_M \right\} / \mathcal{G} \\ &= \left\{ \text{Zusammenhänge } A \text{ auf } P_{\det}^L, \text{ so dass } F_A^+ = -\frac{i}{2} a_\alpha \omega_M \right\} / \mathcal{G}. \end{aligned} \quad (4.27)$$

In den anderen Fällen bestimmen wir zunächst die holomorphen Bündel $Q_L \times_\rho C_0$, $Q_L \times_\rho S_\alpha^2$ bzw. $Q_L \times_\rho C_k$ mit Hilfe der expliziten Biholomorphismen aus Notiz 4.2.6 genauer:

Lemma 4.2.9. *Es sei $Q_L \rightarrow M$ das $S^1 \times S^1$ -Hauptfaserbündel aus (2.3). Dann gilt mit der Bezeichnung aus Lemma 4.2.5 bzw. Notiz 4.2.6, dass*

$$\begin{aligned} Q_L \times_\rho C_0 &\cong \mathcal{L} \\ Q_L \times_\rho S_\alpha^2 &\cong \mathbb{P}(K_M^\alpha \oplus \mathcal{L}) \\ Q_L \times_\rho C_k &\cong K_M^k \otimes \mathcal{L}^{-1} \end{aligned}$$

als holomorphe Bündel über M .

Beweis. Wir beobachten, wie die $S^1 \times S^1$ -Wirkungen ρ auf $C_0 \subset X$, $S_\alpha^2 \subset X$ bzw. $C_k \subset X$ mit den entsprechenden Biholomorphismen aus Notiz 4.2.6 verträglich sind:

$$\begin{array}{ccc} \begin{array}{ccc} C_0 & \xrightarrow{\Phi_0} & \mathbb{C} \\ \rho|_{C_0} \downarrow & & \downarrow \rho_\gamma \\ C_0 & \xrightarrow{\Phi_0} & \mathbb{C} \end{array} & \begin{array}{ccc} S_\alpha^2 & \xrightarrow{\Phi_\alpha} & \mathbb{C}\mathbb{P}^1 \\ \rho|_{S_\alpha^2} \downarrow & & \downarrow [\rho_{\gamma-\delta}^\alpha; \rho_\gamma] \\ S_\alpha^2 & \xrightarrow{\Phi_\alpha} & \mathbb{C}\mathbb{P}^1 \end{array} & \begin{array}{ccc} C_k & \xrightarrow{\Phi_k} & \mathbb{C} \\ \rho|_{C_k} \downarrow & & \downarrow (\rho_{\gamma-\delta})^k \otimes (\rho_\gamma)^{-1} \\ C_k & \xrightarrow{\Phi_k} & \mathbb{C} \end{array} \end{array}$$

(Vergleiche hierzu die Definition der $S^1 \times S^1$ -Wirkung ρ auf X durch (3.10).) \square

In diesem Sinne können wir nun verallgemeinerte Spinoren ψ als holomorphe Schnitte in den entsprechenden Geraden- bzw. Sphärenbündeln auffassen. Die Momentenabbildung μ_I übersetzt sich in der Notation von Notiz 4.2.6 im Falle der Geradenbündel wie folgt:

$$\mu_I \circ \Phi_0^{-1} = -p_0^{-1} (|\cdot|^2) \quad \text{mit } p_0 := \left(\prod_{j=1}^k l_j \right) : (-\infty, a_1] \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \quad (4.28)$$

$$\mu_I \circ \Phi_k^{-1} = -p_k^{-1} (|\cdot|^2) \quad \text{mit } p_k := \left(\prod_{j=1}^k l_j \right) : [a_k, \infty) \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \quad (4.29)$$

Insbesondere ist $\mu_I \circ \Phi_0^{-1}$ bzw. $\mu_I \circ \Phi_k^{-1}$ nur dann ein komplexes Vielfaches des Normquadrates, wenn der Gibbons-Hawking-Raum X nur ein einziges Zentrum $p_z \in X$ mit $\mu_I(p_z) = 0$ besitzt, also mit $X = \mathbb{H}$ der lineare Fall eintritt (vergleiche hierzu auch Notiz 4.2.7). Wir fassen zusammen:

Der Fall $\deg(\mathcal{L}_{\det}^L) < \frac{\text{vol}(M)}{2\pi} a_1$

In diesem Fall sind die Lösungen der Seiberg-Witten-Gleichungen (2.26) Paare (A, ψ) , so dass

- A ein holomorpher Zusammenhang auf P_{\det}^L ist,
- $0 \neq \psi \in \Gamma(M, \mathcal{L})$ holomorph bezüglich des durch A induzierten Zusammenhangs ist und
- $(F_A^+)^{1,1} = -\frac{i}{2} p_0^{-1} (|\psi|^2) \omega_M$ erfüllt ist.

Zwei solche Paare (A, ψ) und (A', ψ') repräsentieren genau dann dasselbe Element im Modulraum $\mathcal{M}_{L,X}$, wenn sie sich um ein Element γ in der Eichgruppe \mathcal{G} unterscheiden. Wie im linearen Fall (vergleiche Lemma 2.6.7) können wir diese Äquivalenz auch umformulieren: Wir bezeichnen dazu die konvexe Funktion $-2p_0^{-1}$ (siehe 4.28) mit

$$P_0 := -2p_0^{-1}: \mathbb{R}_{\geq 0} \longrightarrow [-2a_1, \infty). \quad (4.30)$$

Lemma 4.2.10. *Falls $\deg(\mathcal{L}_{\det}^L) < \frac{\text{vol}(M)}{2\pi} a_1$, dann sind die Lösungen (A, ψ) der verallgemeinerten Seiberg-Witten-Gleichungen (3.32) gegeben durch einen holomorphen Zusammenhang A und einen bezüglich der induzierten holomorphen Struktur $\bar{\partial}_B$ auf \mathcal{L} holomorphen Schnitt $0 \neq \psi \in \Gamma(\mathcal{L})$, so dass*

$$(F_A^+)^{1,1} = \frac{i}{4} P_0 (|\psi|^2) \omega_M.$$

Es sind (A, ψ) und (A', ψ') genau dann eichäquivalent, wenn es einen holomorphen, hermiteschen Isomorphismus $T: (\mathcal{L}, \bar{\partial}_B) \rightarrow (\mathcal{L}, \bar{\partial}_{B'})$ gibt, der ψ in ψ' abbildet.

Beweis. Analog zu Lemma 2.6.7. □

Es ist also wie im linearen Fall die folgende Abbildung wohldefiniert:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{L,X} &\longrightarrow \{ \text{effektive Divisoren } D, \text{ so dass } c_1(\mathcal{O}_M(D)) = c_1(\mathcal{L}) \} \\ [(A, \psi)] &\longmapsto [(\bar{\partial}_B, \psi)] \end{aligned} \quad (4.31)$$

Handelt es sich aber auch wiederum um eine Bijektion? Wir führen diese Frage auf die eindeutige Lösbarkeit einer Differentialgleichung zurück, welche der Kazdan-Warner-Gleichung aus Lemma 2.6.8 sehr ähnlich ist:

Für eine Riemannsche Mannigfaltigkeit M , eine Funktion $p \in C^\infty(\mathbb{R}_{\geq 0}, \mathbb{R})$, welche eingeschränkt auf $\mathbb{R}_{>0}$ einen Diffeomorphismus aufs Bild definiert, eine nicht-negative Funktion $w \in C^\infty(M, \mathbb{R})$, die außerhalb einer Nullmenge positiv ist, sowie eine Funktion $g \in C^\infty(M, \mathbb{R})$, die $\int_M g \, d\text{vol} > 0$ erfüllt, betrachten wir die nicht-lineare Differentialgleichung

$$\Delta_M(\lambda) + p(w \exp(\lambda)) = g. \tag{4.32}$$

Wir interessieren uns für Lösungen $\lambda \in C^\infty(M, \mathbb{R})$.

Definition 4.2.11. Es sei $p \in C^\infty(\mathbb{R}_{\geq 0}, \mathbb{R})$, so dass $p|_{\mathbb{R}_{>0}} : \mathbb{R}_{>0} \rightarrow p(\mathbb{R}_{>0})$ ein Diffeomorphismus ist. Wir nennen eine Riemannsche Mannigfaltigkeit M *p-Kazdan-Warner-lösbar*, wenn die Differentialgleichung (4.32) für alle nicht-negativen $w \in C^\infty(M, \mathbb{R})$, die außerhalb einer Nullmenge positiv sind, und alle $g \in C^\infty(M, \mathbb{R})$, die der Bedingung $\int_M g \, d\text{vol} > 0$ genügen, eine Lösung $\lambda \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ besitzt. Wir nennen eine Riemannsche Mannigfaltigkeit M *p-Kazdan-Warner-eindeutig*, wenn jede Lösung $\lambda \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ von (4.32) eindeutig ist.

Den Satz 2.6.8 können wir damit auch so formulieren:

Satz 4.2.12. (Kazdan-Warner) *Es sei $p(x) = cx^k$ mit $c > 0$ und $k > 0$. Dann ist jede kompakte Riemannsche Mannigfaltigkeit p-Kazdan-Warner-lösbar und p-Kazdan-Warner-eindeutig.*

Vermutung 4.2.13. *Es sei $p = \frac{1}{8}P_0$ mit P_0 wie in (4.30). Dann ist jede kompakte Kähler-4-Mannigfaltigkeit p-Kazdan-Warner-lösbar und p-Kazdan-Warner-eindeutig.*

Lemma 4.2.14. *Sei $\deg(\mathcal{L}_{\det}^L) < \frac{\text{vol}(M)}{2\pi} a_1 \leq 0$ sowie $p = \frac{1}{8}P_0$ mit P_0 wie in (4.30). Dann folgt:*

- a) M ist p-Kazdan-Warner-lösbar \implies Abbildung (4.31) ist surjektiv.
- b) M ist p-Kazdan-Warner-eindeutig \implies Abbildung (4.31) ist injektiv.

Beweis. Das Lemma folgt im Wesentlichen mit denselben Konstruktionen, die wir bereits in Abschnitt 2.6.2 genutzt haben. Das hermitesche Produkt auf \mathcal{L} bezeichnen wir wiederum mit h .

- a) Sei $(\bar{\partial}_0, \psi_0)$ ein Paar aus einer holomorphen Struktur auf \mathcal{L} sowie einem diesbezüglich holomorphen Schnitt $\psi \in \Gamma(\mathcal{L})$. Wir konstruieren im Folgenden ein Urbild des hierdurch repräsentierten Divisors $[(\bar{\partial}_0, \psi_0)]$ bezüglich Abbildung (4.31): Dazu zeigen wir zunächst, dass es eine hermitesche Metrik $h_1 = \exp(\lambda)h$ auf \mathcal{L} gibt, so dass

$$(F_{A_1}^+)^{1,1} = \frac{i}{4} P_0(|\psi_0|_{h_1}^2) \omega_M, \quad (4.33)$$

wobei B_1 der entsprechende Chern-Zusammenhang auf \mathcal{L} bezüglich $\bar{\partial}_0$ und h_1 ist: Mit denselben Umformungen wie in Lemma 2.6.9 erhalten wir, dass (4.33) äquivalent dazu ist, dass λ erfüllt:

$$\begin{aligned} & \left(\Delta_M(\lambda) + \frac{1}{8} P_0 \left(\exp(\lambda) |\psi_0|_h^2 \right) \right) \text{dvol} = -\frac{1}{4} i F_{A_0} \wedge \omega_M \\ \iff & \Delta_M(\lambda) + \frac{1}{8} P_0 \left(\exp(\lambda) |\psi_0|_h^2 \right) = g, \end{aligned}$$

wobei $g \text{dvol} = -\frac{1}{4} i F_{A_0} \wedge \omega_M$ und deshalb $\int_M g \text{dvol} > 0$, da $\deg(\mathcal{L}_{\text{det}}^L) < 0$. Somit liefert die p -Kazdan-Warner-Lösbarkeit von M für $p = \frac{1}{8} P_0$ die Existenz von $\lambda \in C^\infty(M, \mathbb{R})$. Mit diesem $\lambda \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ definieren wir den Bündelautomorphismus $T: \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}$ durch Multiplikation mit $\exp(-\frac{\lambda}{2})$, so dass $T^*(h_1) = h$. Schließlich setzen wir $\psi = T^{-1}(\psi_0)$ sowie $\nabla^B = T^*(\nabla^{B_1})$. Per Konstruktion ist dies ein Urbild von $[(\bar{\partial}_0, \psi_0)]$ (vergleiche hierzu auch den Beweis von Lemma 2.6.10).

- b) In der Konstruktion von a) ist T mit der Eigenschaft $T^*(h_1) = h$ eindeutig bis auf ein Element aus der Eichgruppe $C^\infty(M, S^1)$. Wenn nun nach p -Kazdan-Warner-Eindeutigkeit von M die Funktion λ eindeutig ist, folgt damit die Eindeutigkeit eines jeden Urbildes unter der Abbildung (4.31), wenn es existiert. \square

Der Fall $\deg(\mathcal{L}_{\text{det}}^L) > \frac{\text{vol}(M)}{2\pi} a_k$

In diesem Fall sind die Lösungen der Seiberg-Witten-Gleichungen (2.26) Paare (A, ψ) , so dass

- A ein holomorpher Zusammenhang auf P_{det}^L ist,
- $0 \neq \psi \in \Gamma(M, (K_M)^k \otimes \mathcal{L}^{-1})$ holomorph bezüglich des durch A induzierten Zusammenhangs ist und
- $(F_A^+)^{1,1} = -\frac{i}{2} p_k^{-1} (|\psi|^2) \omega_M$ erfüllt ist.

Analog zum anderen Geradenbündelfall erhalten wir eine wohldefinierte Abbildung

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{L,X} & \longrightarrow \{ \text{effektive Divisoren } D, \text{ so dass } c_1(\mathcal{O}_M(D)) = k \cdot c_1(K_M) - c_1(\mathcal{L}) \} \\ [(A, \psi)] & \longmapsto [(\bar{\partial}_{\Phi \otimes B^{-1}}, \psi)] \end{aligned} \quad (4.34)$$

Lemma 4.2.15. *Sei $\deg(\mathcal{L}_{\det}^L) > \frac{\text{vol}(M)}{2\pi} a_k \geq 0$ sowie $p = \frac{1}{8}P_k$ mit $P_k = 2p_k^{-1}$ (vergleiche (4.29)). Dann folgt:*

a) *M ist p -Kazdan-Warner-lösbar \implies Abbildung (4.34) ist surjektiv.*

b) *M ist p -Kazdan-Warner-eindeutig \implies Abbildung (4.34) ist injektiv.*

Die folgende Vermutung ist, da wir sie unabhängig von der Lage der Gibbons-Hawking-Zentren formulieren, äquivalent zur Vermutung 4.2.13.

Vermutung 4.2.16. *Es sei $p = \frac{1}{8}P_k$ mit $P_k = 2p_k^{-1}$ (vergleiche (4.29)). Dann ist jede kompakte Kähler-4-Mannigfaltigkeit p -Kazdan-Warner-lösbar und p -Kazdan-Warner-eindeutig.*

Der Fall $\deg(\mathcal{L}_{\det}^L) \in \frac{\text{vol}(M)}{2\pi} (a_\alpha, a_{\alpha+1})$ für ein $\alpha \in \{1, \dots, k-1\}$

In diesem Fall sind die Lösungen der Seiberg-Witten-Gleichungen (2.26) Paare (A, ψ) , so dass

- A ein holomorpher Zusammenhang auf P_{\det}^L ist,
- $\psi \in \Gamma(M, \mathbb{P}((K_M)^\alpha \oplus \mathcal{L}))$ holomorph bezüglich des durch A induzierten Zusammenhangs ist, wobei $\psi \neq \psi_\alpha$ für jedes $\alpha \in \{1, \dots, k\}$, und
- $(F_A^+)^{1,1} = \frac{i}{2}\mu_I(\Phi_\alpha^{-1}\psi)\omega_M$ erfüllt ist.

Zwei solche Paare (A, ψ) und (A', ψ') repräsentieren genau dann dasselbe Element im Modulraum $\mathcal{M}_{L,X}$, wenn sie sich um ein Element γ in der Eichgruppe \mathcal{G} unterscheiden. Beachten wir hier zusätzlich, dass (nicht-konstante) holomorphe Abbildungen nach $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$ (nicht-trivialen) meromorphen Abbildungen nach \mathbb{C} entsprechen, also in unserem Fall genauer die Korrespondenz

$$\begin{array}{ccc}
 \left\{ \begin{array}{c} \text{holomorphe Schnitte} \\ \text{von } \mathbb{P}(K_M^\alpha \oplus \mathcal{L}) \text{ mit } \psi \neq \psi_\alpha \text{ und } \psi \neq \psi_{\alpha+1} \end{array} \right\} & & \\
 \swarrow & & \searrow \\
 \left\{ \begin{array}{c} \text{nicht-triviale meromorphe} \\ \text{Schnitte von } (K_M)^\alpha \otimes \mathcal{L}^{-1} \end{array} \right\} & \xrightarrow[\psi \mapsto \frac{1}{\psi}]{1:1} & \left\{ \begin{array}{c} \text{nicht-triviale meromorphe} \\ \text{Schnitte von } (K_M^{-1})^\alpha \otimes \mathcal{L} \end{array} \right\}
 \end{array}$$

wobei „nicht-trivial“ hier heißen soll, dass der meromorphe Schnitt weder konstant auf 0 noch konstant auf ∞ abbildet, so erhalten wir analog zu den Geradenbündelfällen wohldefinierte Abbildungen:

$$\begin{array}{c}
\mathcal{M}_{L,X} \\
\swarrow \quad \searrow \\
\left\{ \begin{array}{l} \text{Divisoren } D, \text{ so dass} \\ c_1(\mathcal{O}_M(D)) = \alpha \cdot c_1(K_M) - c_1(\mathcal{L}) \end{array} \right\} \xrightarrow[1:1]{D \mapsto -D} \left\{ \begin{array}{l} \text{Divisoren } D, \text{ so dass} \\ c_1(\mathcal{O}_M(D)) = \alpha \cdot c_1(K_M) - c_1(\mathcal{L}) \end{array} \right\}
\end{array}$$

In diesem Fall erwarten wir keine Bijektion. Dennoch steht das Bild von $\mathcal{M}_{L,X}$ und der Abbildungsgrad wiederum in ähnlicher Weise wie in den Geradenbündelfällen in enger Verbindung mit der Differentialgleichung (4.32), wobei p hier auf ein beschränktes Intervall in \mathbb{R} abbildet. Wir erwarten, dass auch nicht-effektive Divisoren Teil des Modulraumes sein werden. In welcher Beziehung das Bild von $\mathcal{M}_{L,X}$ zu linearen Systemen steht, hängt sicherlich weiterhin vom Vorzeichen der Intervallgrenzen a_α und $a_{\alpha+1}$ ab, d. h. von der Lage der Gibbons-Hawking-Zentren entlang der μ_I -Achse.

4.2.4 Algebraisch-geometrische Fallunterscheidung im Sphärenfall

In der Situation vom gerade erwähnten Sphärenfall (Fall $\deg(\mathcal{L}_{\det}^L) \in \frac{\text{vol}(M)}{2\pi}(a_\alpha, a_{\alpha+1})$) ist der verallgemeinerte Spinor ψ (so dass (A, ψ) die verallgemeinerten Seiberg-Witten-Gleichungen löst) ein holomorpher Schnitt von $\mathbb{P}(K_M^\alpha \oplus \mathcal{L})$ bezüglich der von A induzierten komplexen Struktur:

$$\psi \in \check{H}^0(\mathbb{P}(K_M^\alpha \oplus \mathcal{L}))$$

Durch einen geeigneten Twist liftet dieser zu einem holomorphen Schnitt

$$s = (s_1, s_2) \in \check{H}^0(\mathcal{L}_1 \oplus \mathcal{L}_2),$$

so dass $\mathbb{P}(s) = \psi \in \check{H}^0(\mathbb{P}(\mathcal{L}_1 \oplus \mathcal{L}_2)) = \check{H}^0(\mathbb{P}(K_M^\alpha \oplus \mathcal{L}))$

$$(s_1)_0 \cap (s_2)_0 = \emptyset, \tag{4.35}$$

also $s_1 \in \check{H}^0(\mathcal{L}_1)$ und $s_2 \in \check{H}^0(\mathcal{L}_2)$ keine gemeinsamen Nullstellen haben. Wir bezeichnen die zugehörigen (effektiven oder trivialen) Divisoren zu s_1 und s_2 mit $D_1 = (s_1)_0$ und $D_2 = (s_2)_0$, so dass wir auch schreiben können:

$$\mathcal{L}_1 = \mathcal{O}(D_1) \quad \text{und} \quad \mathcal{L}_2 = \mathcal{O}(D_2)$$

Fall A $D_1 = 0$

Dann ist $s = (s_1, s_2) \in \check{H}^0(\mathcal{O} \oplus \mathcal{L} \otimes K_M^{-\alpha})$. Insbesondere ist s_1 konstant und s_2 besitzt als holomorpher Schnitt im nicht-trivialen Geradenbündel $\mathcal{L} \otimes K_M^{-\alpha}$ Nullstellen. Da aber s_1 und s_2 keine gemeinsamen Nullstellen haben, folgt $s_1 \neq 0$. Also können wir $\psi \in \check{H}^0(\mathbb{P}(K_M^\alpha \oplus \mathcal{L}))$ auch als Element von $\check{H}^0(\mathcal{L} \otimes K_M^{-\alpha})$ auffassen. Dies entspricht dem Fall, dass der Spinor $\psi \in \Gamma(M, \mathbb{P}(K_M^\alpha \oplus \mathcal{L})) \cong \Gamma(M, Q_L \times_\rho S_\alpha^2)$ nur das α -te

Gibbons-Hawking-Zentrum trifft (nicht aber das $(\alpha + 1)$ -te). In diesem Fall bestimmt unser verallgemeinerter Spinor ψ ein Element in

$$|\mathcal{L} - \alpha K_M| = \mathbb{P}(\check{H}^0(\mathcal{L} \otimes K_M^{-\alpha}))$$

bezüglich der vom Zusammenhang A induzierten komplexen Struktur.

Fall B $D_2 = 0$

Mit denselben Überlegungen erhalten wir für diesen Fall, dass wir $\psi \in \check{H}^0(\mathbb{P}(K_M^\alpha \oplus \mathcal{L}))$ auch als Element von $\check{H}^0(K_M^\alpha \otimes \mathcal{L}^{-1})$ auffassen können. Dies entspricht dem Fall, dass der Spinor $\psi \in \Gamma(M, \mathbb{P}(K_M^\alpha \oplus \mathcal{L})) \cong \Gamma(M, Q_L \times_\rho S_\alpha^2)$ nur das $(\alpha + 1)$ -te Gibbons-Hawking-Zentrum trifft (nicht aber das α -te). In diesem Fall bestimmt unser verallgemeinerter Spinor ψ ein Element in

$$|\alpha K_M - \mathcal{L}| = \mathbb{P}(\check{H}^0(K_M^\alpha \otimes \mathcal{L}))$$

bezüglich der vom Zusammenhang A induzierten komplexen Struktur.

Fall C $D_1 > 0$ und $D_2 > 0$

Da D_1 und D_2 effektiv sind, haben die zugehörigen Schnitte s_1 und s_2 beide Nullstellen. Wir befinden uns in dem Fall, dass der Spinor $\psi \in \Gamma(M, \mathbb{P}(K_M^\alpha \oplus \mathcal{L})) \cong \Gamma(M, Q_L \times_\rho S_\alpha^2)$ beide Gibbons-Hawking-Zentren trifft, das α -te und das $(\alpha + 1)$ -te. Andererseits haben s_1 und s_2 keine gemeinsamen Nullstellen (vergleiche (4.35)) und die effektiven Divisoren D_1 und D_2 erfüllen, dass

$$D_1 \cdot D_2 = 0.$$

(Umgekehrt folgt aus $D_1 \cdot D_2 = 0$ auch $D_1 \cap D_2 = \emptyset$, wenn D_1 und D_2 keine gemeinsame Komponente haben, da D_1 und D_2 effektiv sind.) Der Schnitt $\psi \in \check{H}^0(\mathbb{P}(K_M^\alpha \oplus \mathcal{L}))$ bestimmt hier also ein Element in

$$\bigcup_{D_1 \cdot D_2 = 0} |D_1| \times |D_2|$$

Falls M eine algebraische Fläche ist, folgt weiter mit dem (geometrischen) Hodge-Index-Satz [16] für die Selbstschnittzahlen von D_1 bzw. D_2

$$(D_1)^2 < 0 \quad \text{oder} \quad (D_2)^2 < 0 \quad \text{oder} \quad ((D_1)^2 = 0 \text{ und } (D_2)^2 = 0).$$

Dies liefert uns also schon eine Einschränkung an unsere Basis-Kählermannigfaltigkeit M für das Eintreten dieses Falles.

Bemerkung. Für weitere Untersuchungen wäre es interessant herauszufinden, inwiefern diese Systeme im Sphärenfall mit $\mathcal{M}_{L,X}$ zusammenhängen. Dazu bedarf es sicherlich einer genaueren Analyse der nicht-linearen Differentialgleichung (4.32) auch für den Sphärenfall.

A Anhang

A.1 Konventionen zu Vektorbündeln und Darstellungen

Die folgende Übersicht gibt Auskunft darüber, mit welchen Darstellungen und Bündeln wir arbeiten. Die Tabelle A.1 ist als Zusammenfassung und Ergänzung zum Abschnitt 2.1.2 zu verstehen. Zur besseren Übersicht hier noch einmal die verwendeten Abbildungen und eine Bemerkung vorab:

Bemerkung. Grundsätzlich identifizieren wir oftmals

$$\mathbb{H} = \{ x_0 + x_1i + x_2j + x_3k \mid x_i \in \mathbb{R} \} \cong \mathbb{R}^4 \quad (\text{A.1})$$

als \mathbb{R} -Vektorräume bzw.

$$\mathbb{H} = \{ z_1 + jz_2 \mid z_i \in \mathbb{C} \} \cong \mathbb{C}^2 \quad (\text{A.2})$$

als \mathbb{C} -Vektorräume. Letzteres liefert auch den Gruppenisomorphismus

$$\begin{aligned} S^1 \times_{\mathbb{Z}_2} \text{Sp}(1) &\xrightarrow{\sim} S^1 \times_{\mathbb{Z}_2} \text{SU}(2) = \text{U}(2) \\ [\lambda, q] &\longmapsto (h \mapsto qh\lambda) \quad \text{mit } h = z_1 + jz_2 \\ [\lambda, a + jb] &\longmapsto \lambda \cdot \begin{pmatrix} a & -\bar{b} \\ b & \bar{a} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

Die komplexen Strukturen, die auf \mathbb{H} durch Linksmultiplikation mit i, j, k gegeben sind, übersetzen sich unter (A.2) zu:

$$I = L_i \mapsto \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \quad J = L_j \mapsto \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad K = L_k \mapsto \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.4})$$

Die nun folgende Übersicht ist deshalb mit den Konventionen

$$x = x_0 + x_1i + x_2j + x_3k \quad \text{für Darstellungen auf } \mathbb{R}^4$$

sowie

$$h = z_1 + jz_2 \quad \text{für Darstellungen auf } \mathbb{C}^2$$

zu lesen.

Spin^C(4)-Darstellungen

$$\begin{aligned}
\rho_c &: \text{Spin}^{\text{C}}(4) \longrightarrow \text{SO}(4) & [\lambda, (q_+, q_-)] &\longmapsto (x \mapsto q_- x \overline{q_+}) \\
\rho_{\pm} &: \text{Spin}^{\text{C}}(4) \longrightarrow \text{U}(2) & [\lambda, (q_+, q_-)] &\longmapsto (h \mapsto q_{\pm} h \lambda) \\
\rho_{\det} &: \text{Spin}^{\text{C}}(4) \longrightarrow \text{U}(1) & [\lambda, (q_+, q_-)] &\longmapsto \lambda^2
\end{aligned}$$

U(2)-Darstellungen bzw. $S^1 \times_{\mathbb{Z}_2} \text{Sp}(1)$ -Darstellungen

$$\begin{aligned}
s &: \text{U}(2) \longrightarrow \text{SO}(4) & [\lambda, q] &\longmapsto (x \mapsto qx\lambda) \\
1 \oplus \det &: \text{U}(2) \longrightarrow \text{U}(2) & [\lambda, q] &\longmapsto (h \mapsto \overline{\lambda} h \lambda) \\
\rho_{\text{stand}} &: \text{U}(2) \longrightarrow \text{U}(2) & [\lambda, q] &\longmapsto (h \mapsto qh\lambda) \\
\det &: \text{U}(2) \longrightarrow \text{U}(1) & [\lambda, q] &\longmapsto \lambda^2
\end{aligned}$$

 $\text{U}(2) \times S^1$ -Darstellungen bzw. $[S^1 \times_{\mathbb{Z}_2} \text{Sp}(1)] \times S^1$ -Darstellungen

$$\begin{aligned}
\rho_{S^1} \oplus \rho_{S^1} \cdot \det &: \text{U}(2) \times S^1 \longrightarrow \text{U}(2) & ([\lambda, q], u) &\longmapsto (h \mapsto \overline{\lambda} h \lambda u) \\
\rho_{S^1} \cdot \rho_{\text{stand}} &: \text{U}(2) \times S^1 \longrightarrow \text{U}(2) & ([\lambda, q], u) &\longmapsto (h \mapsto qh \lambda u) \\
\rho_{S^1}^2 \cdot \det &: \text{U}(2) \times S^1 \longrightarrow \text{U}(1) & ([\lambda, q], u) &\longmapsto \lambda^2 u^2
\end{aligned}$$

 $S^1 \times S^1$ -Darstellungen

$$\begin{aligned}
\rho_{\gamma} \oplus \rho_{\delta} &: S^1 \times S^1 \longrightarrow \text{U}(2) & (e^{i\gamma_0}, e^{i\delta_0}) &\longmapsto \begin{pmatrix} e^{i\gamma_0} & 0 \\ 0 & e^{i\delta_0} \end{pmatrix} \\
\rho_{\delta-\gamma} &: S^1 \times S^1 \longrightarrow \text{U}(1) & (e^{i\gamma_0}, e^{i\delta_0}) &\longmapsto e^{i(\delta_0-\gamma_0)} \\
\rho_{\gamma+\delta} &: S^1 \times S^1 \longrightarrow \text{U}(1) & (e^{i\gamma_0}, e^{i\delta_0}) &\longmapsto e^{i(\gamma_0+\delta_0)}
\end{aligned}$$

Weitere Homomorphismen

$$\begin{aligned}
j &: \text{U}(2) \longrightarrow \text{Spin}^{\text{C}}(4) & [\lambda, q] &\longmapsto [\lambda, (\overline{\lambda}, q)] \\
\rho_{S^1} \cdot j &: \text{U}(2) \times S^1 \longrightarrow \text{Spin}^{\text{C}}(4) & ([\lambda, q], u) &\longmapsto [\lambda u, (\overline{\lambda}, q)] \\
\varphi &: \text{U}(2) \times S^1 \longrightarrow S^1 \times S^1 & ([\lambda, q], u) &\longmapsto (u, u\lambda^2)
\end{aligned}$$

Beziehungen zwischen den Darstellungen und Homomorphismen

$$\begin{aligned}
\rho_c \circ j &= s & \rho_c \circ (\rho_{S^1} \cdot j) &= s \\
\rho_+ \circ j &= 1 \oplus \det = (1 \oplus \rho_{\delta-\gamma}) \circ \varphi & \rho_+ \circ (\rho_{S^1} \cdot j) &= \rho_{S^1} \oplus \rho_{S^1} \cdot \det = (\rho_{\gamma} \oplus \rho_{\delta}) \circ \varphi \\
\rho_- \circ j &= \rho_{\text{stand}} & \rho_- \circ (\rho_{S^1} \cdot j) &= \rho_{S^1} \cdot \rho_{\text{stand}} \\
\rho_{\det} \circ j &= \det = \rho_{\delta-\gamma} \circ \varphi & \rho_{\det} \circ (\rho_{S^1} \cdot j) &= \rho_{S^1}^2 \cdot \det = \rho_{\gamma+\delta} \circ \varphi
\end{aligned}$$

Wie in Abschnitt 2.1.2 arbeiten wir mit den folgenden Bezeichnungen:

- $P_{U(2)}$ $U(2)$ -Rahmenbündel einer Kählermannigfaltigkeit M
- L ein S^1 -Bündel über M
- $P_{can} := P_{U(2)} \times_j \text{Spin}^{\mathbb{C}}(4)$ kanonisches $\text{Spin}^{\mathbb{C}}(4)$ -Bündel über M
- $P_L := P_{can} \times_{S^1} L$ ein (anderes) $\text{Spin}^{\mathbb{C}}(4)$ -Bündel über M
- $= (P_{U(2)} \times_M L) \times_{\rho_{S^1 \cdot j}} \text{Spin}^{\mathbb{C}}(4)$
- $Q_L := L \times_M (P_{U(2)} \times_{\det} L)$ $S^1 \times S^1$ -Reduktion für das positive Spinorbündel
- $= (P_{U(2)} \times_M L) \times_{\rho_{S^1 \oplus \rho_{S^1 \cdot \det}}} S^1 \times S^1$

	Strukturgruppe	$\text{Spin}^{\mathbb{C}}(4)$	$U(2)$	$U(2) \times S^1$	$S^1 \times S^1$
TM	Hauptfaserbündel	P_{can}	$P_{U(2)}$	$\widetilde{Q}_L = P_{U(2)} \times_M L$	Q_L
W_{can}^+	$\Lambda^{0,0}(T^*M) \oplus \Lambda^{0,2}(T^*M)$	ρ_c	s	s	$-$
W_{can}^-	$\Lambda^{0,1}(T^*M)$	ρ_+	$1 \oplus \det$	$1 \oplus \det$	$1 \oplus \rho_{\delta-\gamma}$
\mathcal{L}_{det}^{can}	$\Lambda^{0,2}(T^*M)$	ρ_-	ρ_{stand}	ρ_{stand}	$-$
W_L^+	$(\Lambda^{0,0}(T^*M) \oplus \Lambda^{0,2}(T^*M)) \otimes \mathcal{L}$	ρ_{det}	\det	\det	$\rho_{\delta-\gamma}$
W_L^-	$\Lambda^{0,1}(T^*M) \otimes \mathcal{L}$	$-$	ρ_+	$\rho_{S^1} \oplus \rho_{S^1} \cdot \det$	$\rho_\gamma \oplus \rho_\delta$
\mathcal{L}_{det}^L	$\Lambda^{0,2}(T^*M) \otimes \mathcal{L}^2$	$-$	ρ_-	$\rho_{S^1} \cdot \rho_{stand}$	$-$
		$-$	ρ_{det}	$\rho_{S^1}^2 \cdot \det$	$\rho_{\gamma+\delta}$

Tabelle A.1 Spinor- und Determinantenbündel als assoziierte Bündel im Kählerfall

A.2 Konventionen zur Indizierung

Im Verlauf der Arbeit benötigen wir verschiedene S^1 -Darstellungen und -wirkungen. Um die Übersichtlichkeit zu erhöhen, erhalten diese manchmal einen zusätzlichen Index. Die Namensgebung sei hier kurz erklärt:

S_h^1 Diese S^1 wirkt auf einer Hyperkählermannigfaltigkeit hyperkählersch.

S_r^1 Diese S^1 wirkt auf einer Hyperkählermannigfaltigkeit Metrik erhaltend und rotierend in folgendem Sinne: Für $e^{i\alpha} \in S_r^1$ gilt

$$\begin{aligned}(e^{i\alpha})_* I(e^{-i\alpha})_* &= I \\ (e^{i\alpha})_* J(e^{-i\alpha})_* &= \cos(-2\alpha)J + \sin(-2\alpha)K \\ (e^{i\alpha})_* K(e^{-i\alpha})_* &= -\sin(-2\alpha)J + \cos(-2\alpha)K.\end{aligned}$$

$S_\gamma^1 \times S_\delta^1$ Dieses Paar wirkt auf einer Hyperkählermannigfaltigkeit Metrik erhaltend und rotierend in folgendem Sinne: Für $(e^{i\gamma}, e^{i\delta}) \in S_\gamma^1 \times S_\delta^1$ gilt

$$\begin{aligned}(e^{i\gamma}, e^{i\delta})_* I(e^{-i\gamma}, e^{-i\delta})_* &= I \\ (e^{i\gamma}, e^{i\delta})_* J(e^{-i\gamma}, e^{-i\delta})_* &= \cos(\gamma - \delta)J + \sin(\gamma - \delta)K \\ (e^{i\gamma}, e^{i\delta})_* K(e^{-i\gamma}, e^{-i\delta})_* &= -\sin(\gamma - \delta)J + \cos(\gamma - \delta)K.\end{aligned}$$

Diese Notation ist an die Arbeit [21] angelehnt.

Die doppelte Überlagerung

$$S_r^1 \times S_h^1 \longrightarrow S_\gamma^1 \times S_\delta^1 \quad (e^{i\alpha}, e^{i\beta}) \longmapsto (e^{i\beta}, e^{i\beta+2\alpha})$$

ist mit den obigen Eigenschaften verträglich.

Wir verwenden diese Indizes weiterhin auch für S^1 -Wirkungen auf anderen Mannigfaltigkeiten, wenn es eine (anti-)äquivariante Abbildung in besagte Hyperkählermannigfaltigkeit gibt, welche die S^1 -Wirkung in die S^1 -Wirkung mit dem entsprechenden Index überführt.

Literaturverzeichnis

- [1] Charles P. Boyer and Krzysztof Galicki. *Sasakian geometry*. Oxford Mathematical Monographs. Oxford University Press, Oxford, 2008.
- [2] Ana Cannas da Silva. *Lectures on symplectic geometry*, volume 1764 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 2001.
- [3] Tohru Eguchi and Andrew J. Hanson. Self-dual solutions to Euclidean gravity. *Ann. Physics*, 120(1):82–106, 1979.
- [4] Robert Friedman and John W. Morgan. Algebraic surfaces and Seiberg-Witten invariants. *J. Algebraic Geom.*, 6(3):445–479, 1997.
- [5] Robert Friedman and John W. Morgan. Obstruction bundles, semiregularity, and Seiberg-Witten invariants. *Comm. Anal. Geom.*, 7(3):451–495, 1999.
- [6] Thomas Friedrich. *Dirac operators in Riemannian geometry*, volume 25 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2000. Translated from the 1997 German original by Andreas Nestke.
- [7] G. W. Gibbons and S. W. Hawking. Gravitational multi-instantons. *Phys. Lett. B*, 78(4):430–432, 1978.
- [8] Phillip Griffiths and Joseph Harris. *Principles of algebraic geometry*. Wiley-Interscience [John Wiley & Sons], New York, 1978. Pure and Applied Mathematics.
- [9] Andriy Haydys. Generalized Seiberg-Witten equations and hyperKähler geometry. *Dissertation, eprint <http://webdoc.sub.gwdg.de/diss/2006/haydys/haydys.pdf>*, 2006.
- [10] N. J. Hitchin, A. Karlhede, U. Lindström, and M. Roček. Hyper-Kähler metrics and supersymmetry. *Comm. Math. Phys.*, 108(4):535–589, 1987.
- [11] Jerry L. Kazdan and F. W. Warner. Curvature functions for compact 2-manifolds. *Ann. of Math. (2)*, 99:14–47, 1974.
- [12] Shoshichi Kobayashi and Katsumi Nomizu. *Foundations of differential geometry. Vol I*. Interscience Publishers, a division of John Wiley & Sons, New York-London, 1963.

-
- [13] Shoshichi Kobayashi and Katsumi Nomizu. *Foundations of differential geometry. Vol. II*. Interscience Tracts in Pure and Applied Mathematics, No. 15 Vol. II. Interscience Publishers John Wiley & Sons, Inc., New York-London-Sydney, 1969.
- [14] John W. Morgan. *The Seiberg-Witten equations and applications to the topology of smooth four-manifolds*, volume 44 of *Mathematical Notes*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1996.
- [15] A. Newlander and L. Nirenberg. Complex analytic coordinates in almost complex manifolds. *Ann. of Math. (2)*, 65:391–404, 1957.
- [16] Liviu I. Nicolaescu. *Notes on Seiberg-Witten theory*, volume 28 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2000.
- [17] V. Ya. Pidstrigach. Hyper-Kähler manifolds and the Seiberg-Witten equations. *Tr. Mat. Inst. Steklova*, 246(Algebr. Geom. Metody, Svyazi i Prilozh.):263–276, 2004.
- [18] Ignasi Mundet i Riera. Yang-mills-higgs theory for symplectic fibrations. *Ph.D. Thesis, eprint arXiv:math/9912150*, 1999.
- [19] N. Seiberg and E. Witten. Electric-magnetic duality, monopole condensation, and confinement in $N = 2$ supersymmetric Yang-Mills theory. *Nuclear Phys. B*, 426(1):19–52, 1994.
- [20] Claire Voisin. *Hodge theory and complex algebraic geometry. I*, volume 76 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 2002. Translated from the French original by Leila Schneps.
- [21] Robert Waldmüller. Gibbons-Hawking-Räume und eine Verallgemeinerung der Seiberg-Witten-Gleichungen. *Diplomarbeit*, 2003.
- [22] Edward Witten. Monopoles and four-manifolds. *Math. Res. Lett.*, 1(6):769–796, 1994.

Index

- antikanonisches Geradenbündel, 17
- antiselbstduale 2-Form, 24
- antiselbstdualer Zusammenhang, 29

- Calabi-Metrik, 48
- Cauchy-Riemann-Operator, 11, 24
- Chern-Zusammenhang, 18, 27
- Clifford-Multiplikation, 21
 - auf Kählermannigfaltigkeiten, 22
 - verallgemeinerte, 52, 56, 61, 64

- Determinantenbündel, 15
- diagonale S^1 -Wirkung, 38, 44, 50
- Differentialform vom Typ (p, q) , 9
- Dirac-Operator, 21, 23
 - komplex-geometrisch, 23
 - nicht-linearer, 50, 56
 - verallgemeinerter, 56
- Divisor, 11, 12
 - effektiver, 12, 13
- Dolbeaut-Operator, 23, 24

- effektiver Divisor, 12, 13
- Eguchi-Hanson-Raum, 47
- Eichgruppe, 19, 57

- Fallunterscheidung
 - nach $\deg(\mathcal{L}_{\det}^L)$, 29, 82
- Faser
 - lineares Modell, 37
 - nicht-lineare, 40
- Fundamentalvektorfeld, 10

- Geradenbündel
 - antikanonisches, 17
 - Grad, 28
 - hermitesches, 11
 - holomorphes, 11
- Gibbons-Hawking-Raum, 40, 82
- Gibbons-Hawking-Sphären, 83
- Gibbons-Hawking-Zentrum, 40, 82
- Grad eines Geradenbündels, 28
- Gruppenwirkung, 10
 - diagonale S^1 , 38, 44, 50
 - Hamiltonsche, 10, 38, 44
 - hyperkählersche, 38, 44
 - $S^1 \times S^1$, 44, 49
 - symplektische, 10

- Hamiltonsche Wirkung, 10, 38
- hermitesches Geradenbündel, 11
- hermitesches Produkt, 7
- Hodge-Stern-Operator, 23, 24
- holomorphe Struktur, 11
- holomorpher Zusammenhang, 27, 75
- holomorphes Geradenbündel, 11
- holomorphes Vektorbündel, 11
- Hopf-Bündel, 39
 - lokales, 45
- Hyperfläche, 12
 - irreduzible, 12
- Hyperkählergeometrie, 8
- Hyperkählermannigfaltigkeit, 8
- Hyperkählerreduktion, 11, 48
- Hyperkählerstruktur, 37
 - Gibbons-Hawking-Raum, 42

- k -Center-Gibbons-Hawking-Raum, 40, 82
- Kähler-Fall, 15
- Kählerform, 7, 45
- Kählergeometrie, 7
- Kählermannigfaltigkeit, 7

- Kählerpotential, 10
 kanonische $\text{Spin}^{\mathbb{C}}$ -Struktur, 17
 kanonische 1-Form, 67, 70
 komplexes Vektorbündel, 12
 Konfigurationsraum, 26
 verallgemeinerter, 57
 kovariante Ableitung, 18
 verallgemeinerte, 50, 51
 Krümmung, 18

 Levi-Civita-Zusammenhang, 18
 linear äquivalente Divisoren, 12
 lineare Faser, 37
 lineares System, 13
 vollständiges, 13
 lokal definierende Funktionen, 12

 Mannigfaltigkeit
 fast komplexe, 7
 Hyperkähler, 8
 Kähler, 7
 komplexe, 7
 symplektische, 7
 Maurer-Cartan-Form, 19
 Momentenabbildung, 10, 38, 44, 47

 nicht-lineare Faser, 40
 nicht-linearer Dirac-Operator, 50, 56
 Nijenhuis-Tensor, 7, 78
 normale Koordinaten, 7

 p -Kazdan-Warner-eindeutig, 89
 p -Kazdan-Warner-lösbar, 89

 quadratische Abbildung, 24, 25
 Quaternionen, 15

 Reduktion, 11
 Hyperkähler, 11, 48
 Kähler, 11
 Marsden-Weinstein, 11

 $S^1 \times S^1$ -Wirkung, 44, 49
 Satz
 Dirac-Op.=Dolbeaut-Op., 23
 Hyperkählerreduktion, 11
 Kazdan-Warner, 31
 Marsden-Weinstein-Reduktion, 11
 Newlander-Nirenberg, 7
 Seiberg-Witten-Modulraum
 (Kähler-Fall), 34, 35
 Schnittform, 25
 Seiberg-Witten-Gleichungen, 26, 39
 verallgemeinerte, 37, 57
 Seiberg-Witten-Modulraum, 15, 26
 holomorphe Beschreibung, 26, 34,
 77
 verallgemeinerter, 59, 61, 77
 selbstduale 2-Form, 24
 $\text{Spin}^{\mathbb{C}}$ -Struktur, 15
 kanonische, 17
 Spinorbündel, 15, 16
 kanonische, 17
 lineares, 37
 negatives, 16
 positives, 16
 verallgemeinertes, 47, 77, 80
 spurloser Endomorphismus, 25
 Struktur
 fast komplexe, 7
 holomorphe, 11
 Hyperkähler, 37, 42
 kanonische $\text{Spin}^{\mathbb{C}}$, 17
 komplexe, 7, 77, 80, 82
 $\text{Spin}^{\mathbb{C}}$, 15
 symplektische Mannigfaltigkeit, 7
 symplektische Wirkung, 10

 Vektorbündel
 holomorphes, 11
 komplexes, 12
 verallgemeinerte
 Clifford-Multiplikation, 52, 56, 61,
 64
 kovariante Ableitung, 50, 51
 Seiberg-Witten-Gleichungen, 57
 verallgemeinerter
 Dirac-Operator, 56
 Konfigurationsraum, 57
 Seiberg-Witten-Modulraum, 59, 61

-
- verallgemeinertes
 - Spinorbündel, 47, 77, 80
 - vollständiges lineares System, 13
 - Volumenform, 7

 - Weitzenböck-Formel, 61
 - verallgemeinerte, 69, 75

 - Zusammenhang, 18
 - antiselbstdual, 29
 - auf u^*F , 66
 - Chern, 18, 27
 - hermitescher, 18
 - holomorpher, 27, 75
 - Levi-Cevita, 18
 - Spinorbündel, 18

 - 2-Form
 - antiselbstduale, 24
 - selbstduale, 24